内容简介

本书是学习实变函数课程的一本极好的辅导书，主要内容有：集合与点集、勒贝格测度、可测函数、勒贝格积分、微分与不定积分、$L^p(p\geq 1)$空间等. 本书的编写顺序与实变函数课程的教材同步，部分依据北京大学出版社出版、周民强编的《实变函数》，使读者在学习教材的同时，可通过本书更好地归纳内容、释疑解难，并通过大量而全面的例题融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法. 认真地学习本书一定能帮助读者学好实变函数，掌握实变函数的思想与方法.

前　言

“实变函数”是数学与应用数学专业的一门重要的专业基础课，是“数学分析”中微积分理论的发展与深化.“数学分析”主要研究定义在区间上的连续函数，“复变函数”主要讨论定义在区域上的解析函数的性质，而“实变函数”则将研究对象扩大到定义在可测集上的可测函数类，使微积分的理论得到在更宽松条件下的讨论与应用. 通过学习实变函数，将使我们受到更为严格的数学训练，思维能力产生一个飞跃，分析处理问题的思想方法更加灵活与细致.但是，实变函数的概念性强、内容抽象、推理严谨、逻辑周密，使我们学习起来比较困难，思维难以展开，解题难以入手，所以我们编写了此书来帮助读者解决学习中的困难.

本书的编写采取与教材同步的方法.每节分为三个部分：主要内容，疑难解析，方法、技巧与典型例题分析.本书主要内容部分依据北京大学出版社周民强编《实变函数》教材. 本书的特点是循序渐进地、扎扎实实地从理论、思维、方法上帮助读者消化知识，理解内容，学习方法，掌握技巧.特别是，作者利用大量的、全面的、难度恰当的例题，与读者一起讨论、分析、归纳、总结，从而达到融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法的目的.

由于实变函数的习题难易程度相差很大，因此，我们只选了一些难度恰当的题目. 在解题过程中力求分析深入、论证严密、概念准确、语言简明、方法多样、思路开阔，对于比较繁冗与过难的习题，请读者自行修习. 由于实变函数主要进行理论研究，所以本书的例题以证明题为主，计算题的数量很少.更由于各种教材的内容和体系不同，因此解题的方法与依据也可能不同，请读者学习时注意.

作者在本书的编写过程中，曾参阅了同行们的一些著作，在此向他们一一表示谢意．本书的出版得到了华中科技大学出版社领导与编辑的大力支持和帮助，出版工作人员为此做了许多精细的工作，在此，作者向他们表示谢意．

由于学识所限，本书的错误与不足之处在所难免，热忱欢迎读者与同行批评指正．希望本书能成为您的良师益友，欢迎您选用本系列丛书．

孙清华　孙昊

2004 年 6 月

目　　录

第一章　集合与点集

第一节　集合与集合的运算

主要内容

一、集合

集合是按照某种规定而能够识别的一类具体对象或事物的总体. 构成集合的这些对象或事物称为集合的元素.

集合可用列举法或描述法表示，如

$$A=\{1,2,3,4,5\}\quad 或\quad A=\{x:x<6,x\in \mathbf{N}\}.$$

1. 对于两个集合A与B，若$x\in A$必有$x\in B$，则称A包含于B或B包含A，记做$A\subset B$，或$B\supset A$. 若$A\subset B$，且B中含有不属于A的元素，则称A是B的真子集，记做$A\subsetneqq B$或$B\supsetneqq A$.

2. 设A,B是两个集合，若$A\subset B$且$B\subset A$，则称集合A与B相等，记做$A=B$.

3. 设I是任给的一个集合，对于每一个$\alpha\in I$，我们指定一个集合A_α，这样得到的集合的总体称为集合族，记为$\{A_\alpha:\alpha\in I\}$. I称为指标集. 当$I=\mathbf{N}$时，$\{A_\alpha\}$也称集合列，记做$\{A_k\}$.

集合可分为空集、有限集与无限集.

二、集合的运算

1. 设A,B是两个集合，则称集合$\{x:x\in A 或 x\in B\}$为A与B的并集或和集，记做$A\cup B$.

2. 设A,B是两个集合，则称集合$\{x:x\in A,x\in B\}$为A与B的交集或通集，记做$A\cap B$. 若$A\cap B=\varnothing$，称A与B不相交.

交与并及其联合运算，有以下规律.

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2)结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3)分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

以上规律可以推广到任意多个集合情形.

(4)幂等性　$A\cup A=A, A\cap A=A$,

空集是求"并"运算的零元　$A\cup\varnothing=A$;

(5)保单调性　如果 $A_\alpha\subset B_\alpha(\alpha\in I)$，则

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\subset\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha,\quad \bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\subset\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha.$$

3. 设 A, B 是两个集合，则称集合 $\{x; x\in A, x\overline{\in} B\}$ 为 A 与 B 的差集，记做 $A\backslash B$（读做 A 减 B）.

当 B 是 A 的子集时，称 $A\backslash B$ 是集合 B 关于 A 的补集或余集，记做 $B^{C}=A\backslash B$ 或 $\mathscr{C}_A B(\mathscr{C}B)$.

$A\backslash B$ 运算有以下性质：

(1)$A\cup A^{C}=X$(全集)，$A\cap A^{C}=\varnothing$，$(A^{C})^{C}=A$，$X^{C}=\varnothing$，$\varnothing^{C}=X$.

(2)$A\backslash B=A\cap B^{C}$.

(3)若 $A\supset B$，则 $A^{C}\subset B^{C}$；若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\subset B^{C}$.

还有德·摩根(De Morgan)律：

(4)$(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^{C}=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^{C}$.

(5)$(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^{C}=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^{C}$.

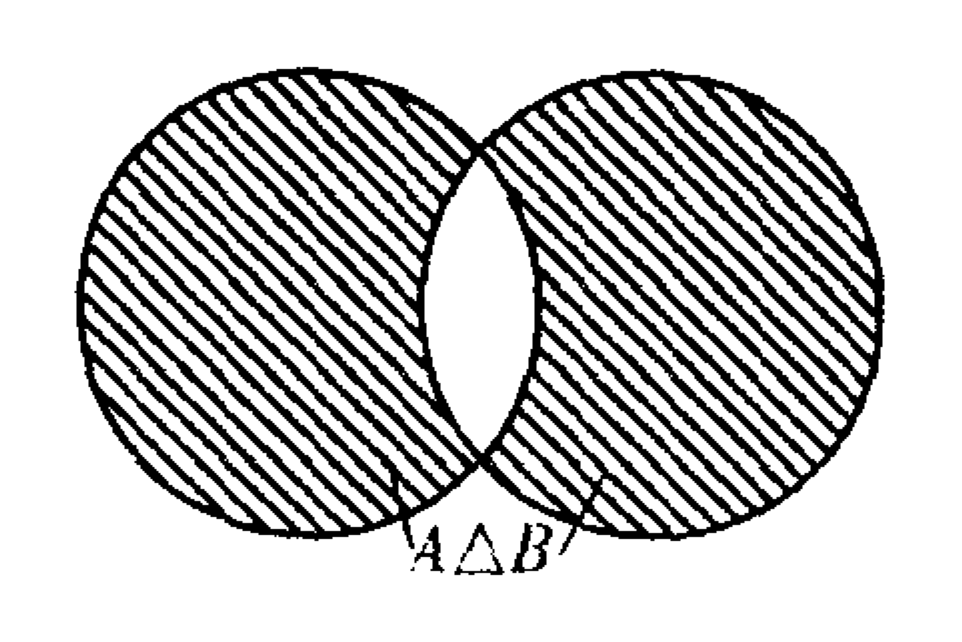


图1.1

设 A, B 为两个集合，则称集合 $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ 为 A 与 B 的对称差集，记做 $A\triangle B$，如图1.1所示，有下列事实：

$$A\triangle\varnothing=A, A\triangle A=\varnothing, A\triangle A^{C}=X, A\triangle X=A^{C},$$

$$A\triangle B=B\triangle A, (A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C),$$

$$A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C),A^{c}\triangle B^{c}=A\triangle B.$$

对任意的集合A与B，存在惟一的集合E，使得$E\triangle A=B$. 实际上$E=B\triangle A$.

三、上限集与下限集

设$\{A_k\}$是一个集合列，若$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots$，则称此集合列为递减集合列. 其交集$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$称为集合列$\{A_k\}$的极限集，记做$\lim\limits_{k\to\infty}A_k$. 若$\{A_k\}$满足$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots$，则称$\{A_k\}$为递增集合列，其并集$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$称为集合列$\{A_k\}$的极限集，记做$\lim\limits_{k\to\infty}A_k$.

1. 设$\{A_k\}$是任意集合列，令$B_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$，$n=1,2,\cdots$，则称

$$\lim_{k\to\infty}B_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$$

为集合列$\{A_k\}$的上极限集，简称上限集，记做$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$.

类似地，称集合$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$为集合列$\{A_k\}$的下极限集，简称下限集，记做

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

对上、下限集的运算，有

(1)$E\setminus\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}(E\setminus A_k)$；　　(2)$E\setminus\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(E\setminus A_k)$.

2. 若$\{A_k\}$为一集合列，则

(1)$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\{x$:对任意自然数$n$，存在$k(k\geqslant n)$，$x\in A_k\}$；

(2)$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\{x$:存在自然数$n_0$，当$k\geqslant n_0$时，$x\in A_k\}$.

从而可知$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k\supset\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$.

四、集合的直积

设X,Y是两个集合，称一切有序“元素对”(x,y)(其中$x\in X$，$y\in Y$)构成的集合为X与Y的直积集，记做$X\times Y$，即

$$X\times Y=\{(x,y):x\in X,y\in Y\},$$

其中$(x,y)=(x',y')$是指$x=x'$，$y=y'$，$X\times X$ 也记做X^2.

疑难解析

1. 叙述$\in$和$\subset$的区别.

答 “$\in$”表示集合与其元素之间的从属关系，而“$\subset$”表示集合与集合之间的包含关系. $a\in A$ 不能写成$a\subset A$，但可以写做$\{a\}\subset A$，此时$\{a\}$表示只含元素a的“单元素集”.

2. 怎样理解集合族的概念？

答 集合族也称集族，即若有任意集合I(有限集或无限集). 如果对I中每个元素α，都有一个集合A_α与之对应，则所有的A_α组成一个集合(此时集合A_α作为一个元素)称为以I为指标集的集族，记做$\{A_\alpha:\alpha\in I\}$或$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

集族即以集合为元素的集合.

若$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$是任意集族，则$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 是$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$的并集，$\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 是$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$的交集.

3. 怎样理解上限集与下限集概念？它们有什么现实意义？

答 在利用点集分析讨论函数性质时，经常要用到上限集与下限集的概念.

设$A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$是任意一列集合，则由属于上述集列中无限多个集的那种元素的全体所组成的集称为这一列集合的上限集，记做$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$ 或$\limsup\limits_{k\to\infty}A_k$，即

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\{x:存在无限多个A_k,使x\in A_k\}.$$

而由属于集列中从某指标$k(x)$(指标与x有关)以后的所有集合A_k的那种元素x的全体(即除去有限多个集以外的所有集合A_k都含有的那种元素)组成的集称为这一列集合的下限集，记做$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$ 或$\liminf\limits_{k\to\infty}A_k$，即

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\{x:当k>k(x)时,x\in A_k\},$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\quad \underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

我们来证第一个等式，第二个等式可类似证明. 设$P=\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k$，$Q=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$. 若$x\in P$，则由上限集定义，$x$ 属于$\{A_k\}$中无限个集，不妨设x 同时属于$A_{k_1},A_{k_2},\cdots,A_{k_m},\cdots(k_m<k_{m+1},m=1,2,\cdots)$，故对任意自然数$n$，当$k_m>n$ 时，$x\in A_{n_k}\subset\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，即$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，于是$P\subset Q$. 反之，设有$y\in Q$，则对任意自然数$n$，$y\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，取$k=1$，因为$y\in\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$，所以存在自然数$k_1$，使$y\in A_{k_1}$；又因为$y\in\bigcup_{k=k_1+1}^{\infty}A_k$，所以存在自然数$k_2$，使$y\in A_{k_2}$. 如此继续，得一自然数列$\{k_m\}$，$k_1<k_2<\cdots<k_m<\cdots$，而$y$ 属于一切A_{k_m}，故$y\in P$，于是$Q\subset P$. 综合得$P=Q$，命题得证.

对任意一列集$\{A_k\}$和任意集合$\{S\}$，有

$$S\setminus\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\underline{\lim_{k\to\infty}}(S\setminus A_k),\quad S\setminus\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\overline{\lim_{k\to\infty}}(S\setminus A_k),$$

因为

$$\begin{aligned}S\setminus\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k&=S\setminus\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(S\setminus\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\Big)\quad\text{（狄・摩根律）}\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(S\setminus A_k)=\underline{\lim_{k\to\infty}}(S\setminus A_k).\end{aligned}$$

如果集列$\{A_k\}$的上限集与下限集相等，即$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=A$，则称集列$\{A_k\}$收敛，集合$A$ 是集列$\{A_k\}$的极限，记做$A=\lim_{k\to\infty}A_k$.

方法、技巧与典型例题分析

对一门新的学科，重要的是理解概念，利用概念辨析问题、证明问题体现了对概念的理解和掌握的深度.

例 1 设r,s,t 是三个互不相同的数，且$A=\{r,s,t\}$，$B=\{r^2,s^2,t^2\}$，$C=\{rs,st,tr\}$. 若$A=B=C$，证明：$(r,s,t)=(1,w,w^2)$，其中$w=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i})$.

证 因为$A=B=C$,则有

$$r+s+t=r^2+s^2+t^2=rs+st+tr=k,$$

从而 $k^2=(r+s+t)^2=(r^2+s^2+t^2)+2(rs+st+tr)=3k$,

解得$k=0$或$k=3$. 又有

$$rst=r^2\cdot s^2\cdot t^2=(rst)^2,$$

所以$rst=1$. 于是当$k=3$时,r,s,t为方程

$$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3=0$$

的根,从而解得$r=s=t=1$,不合题意.

当$k=0$时,r,s,t为方程$x^3-1=0$的根. 解得$x=1$,$x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i})$,即$w=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i})$.

例2 设三集合A,B,C有关系$A\subset B,B\subset C$. 证明:$A\subset C$.

证 因为$A\subset B,B\subset C$,所以对$x\in A$,有$x\in B$,又有$x\in C$,于是$A\subset C$.

例3 设有集合A,B,C,D,证明

(1)$(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$;

(2)$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(3)$A-(B-C)\subset(A-B)\cup C$;

(4)$(A-B)-(C-D)\subset(A-C)\cup(D-B)$;

(5)$(A-B)\cup C=A-(B-C)\Leftrightarrow C\subset A$.

证 (1)$x\in(A-B)\cap(C-D)\Leftrightarrow x\in(A-B)$且$x\in(C-D)$ $\Leftrightarrow x\in A,x\overline{\in}B,x\in C,x\overline{\in}D\Leftrightarrow x\in A\cap C,x\overline{\in}B\cup D\Leftrightarrow x\in(A\cap C)-(B\cup D)$.

也可以用补集概念来证:

$$\begin{aligned}&(A-B)\cap(C-D)\\&=(A\cap B^{c})\cap(C\cap D^{c})=(A\cap C)\cap(B^{c}\cap D^{c})\\&=(A\cap C)\cap(B\cup D)^{c}=(A\cap C)-(B\cup D).\end{aligned}$$

(2)$x\in(A\cap B)\cup C\Leftrightarrow x\in A\cap B$或$x\in C\Leftrightarrow x\in A$且$x\in B$或$x\in C\Leftrightarrow x\in A\cup C$且$x\in B\cup C\Leftrightarrow x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(3) $x\in A-(B-C)\Leftrightarrow x\in A, x\overline{\in} B-C\Leftrightarrow x\in A,$

$x\overline{\in} B$ 或 $x\in A, x\overline{\in} B, x\in C\Leftrightarrow x\in A-B$ 或 $x\in C$

$\Leftrightarrow x\in (A-B)\cup C.$

由 x 的任意性，关系式成立．也可用补集概念来证：

$$
\begin{aligned}
A-(B-C)&=A\cap(B\cap C^{c})^{c}=A\cap(B^{c}\cup C)\\
&=(A\cap B^{c})\cup(A\cap C)\subset(A\cap B^{c})\cup C\\
&=(A-B)\cup C.
\end{aligned}
$$

(4) $(A-B)-(C-D)$

$$
\begin{aligned}
&=(A\cap B^{c})\cap(C\cap D^{c})^{c}=(A\cap B^{c})\cap(C^{c}\cup D)\\
&=(A\cap B^{c}\cap C^{c})\cup(A\cap B^{c}\cap D)\subset(A\cap C^{c})\cup(B^{c}\cap D)\\
&=(A-C)\cup(D-B).
\end{aligned}
$$

(5) **充分性**　因为 $(A-B)\cup C=(A-B)\cup(A\cap C)$，而 $A-(B-C)=(A-B)\cup C$，所以 $A\cap C=C$，即 $C\subset A$ 是等式成立的充分条件．

必要性　若 $C\not\subset A$，则有 $x\in C$ 且 $x\overline{\in} A$，从而 $x\overline{\in}(A-B)$ 且 $x\overline{\in} A\cap C$．于是 $x\overline{\in}(A-B)\cup(A-C)$，而 $x\in(A-B)\cup C$，从而等式不成立，矛盾．

例 3　证明 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$．

证　$(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$
\begin{aligned}
&=[(A\cap B)\cup A]\cap[(A\cap B)\cup C]\\
&=A\cap[(A\cup C)\cap(B\cup C)]=A\cap(B\cup C).
\end{aligned}
$$

例 4　证明 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$．

证　$(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$$
\begin{aligned}
&=[(A\cup B)\cap A]\cup[(A\cup B)\cap C]\\
&=A\cup[(A\cap C)\cup(B\cap C)]=A\cup(B\cap C).
\end{aligned}
$$

例 5　设 $A_i=(0,i]$，$i=1,2,\cdots$．证明：

(1) $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=(0,\infty)$；　　(2) $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=(0,1]$．

证　(1) 对每个 $A_i=(0,i]$，$i=1,2,\cdots$，有 $A_i\subseteq(0,\infty)$，故 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$

$\subseteq(0,\infty)$. 又对任意 $x\in(0,\infty)$，必有 $k\in\mathbf{N}$，使 $0<x\leqslant k$，故 $x\in(0,k]=A_k\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，所以 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\supseteq(0,\infty)$. 命题得证.

(2)设 $x\overline{\in}(0,1]$，则 $x\leqslant 0$ 或 $x>1$. 若 $x\leqslant 0$，显然 $x\overline{\in}\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$；若 $x>1$，因为 $x\overline{\in}(0,1)=A_1\Rightarrow x\overline{\in}\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$. 综合知，若 $x\overline{\in}(0,1]$，则 $x\overline{\in}\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$.

对任意 $i\in\mathbf{N}$，恒有 $A_i=(0,i]\supseteq(0,1]$，故 $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\supseteq(0,1]$. 命题得证.

例 6 证明关于差集的若干命题：

(1) $(A\backslash B)=A\backslash(A\cap B)=(A\cup B)\backslash B$；

(2) $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap C)$；

(3) $A\backslash(B\backslash C)=(A\backslash B)\cup(A\cap C)$；

(4) $(A\backslash B)\backslash C=A\backslash(B\cup C)$；

(5) $(A\backslash B)\cap(C\backslash D)=(A\cap C)\backslash(B\cup D)$.

证 (1)因为 $A\backslash(A\cap B)=(A\backslash A)\cup(A\backslash B)=\varnothing\cup(A\backslash B)=A\backslash B$，又 $(A\cup B)\backslash B=(A\backslash B)\cup(B\backslash B)=(A\backslash B)\cup\varnothing=A\backslash B$. 综上即知命题成立.

(2)因为 $x\in A\cap(B\backslash C)$，则 $x\in A$，$x\in B$，$x\overline{\in}C$，即 $x\in A\cap B$，$x\overline{\in}A\cap C$，所以 $x\in(A\cap B)\backslash(A\cap C)$，即

$$A\cap(B\backslash C)\subset(A\cap B)\backslash(A\cap C).$$

当 $x\in(A\cap B)\backslash(A\cap C)$，则 $x\in A\cap B$，$x\overline{\in}A\cap C$，即 $x\in A$，$x\in B$，$x\overline{\in}C$，所以 $x\in A\cap(B\backslash C)$，即 $(A\cap B)\backslash(A\cap C)\subset A\cap(B\backslash C)$. 综上即知命题成立.

(3)
$$\begin{aligned}A\backslash(B\backslash C)&=A\cap(B\cap C^{c})^{c}=A\cap(B^{c}\cup C)\\&=(A\cap B^{c})\cup(A\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\cap C).\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}(A\backslash B)\backslash C&=(A\cap B^{c})\cap C^{c}=A\cap(B^{c}\cap C^{c})\\&=A\cap(B\cup C)^{c}=A\backslash(B\cup C).\end{aligned}$$

(5) $(A\backslash B)\cap(C\backslash D)$

$=(A\cap B^{c})\cap(C\cap D^{c})=(A\cap C)\cap(B^{c}\cap D^{c})$

$=(A\cap C)\cap(B\cup D)^{c}=(A\cap C)\backslash(B\cup D)$.

从上面几个例题我们看到，关于集合的等式的证明，一般用两种方法：一种是由等式左边直接推出右边；另一种先证明等式左边的集合被等式右边集合包含，再证明等式右边的集合被等式左边集合包含，从而得出相等. 显然，第二种证法易于办到，所以也是今后较多地用到的证法.

例7 设 $A_i=[0,1/i)$，$i=1,2,\cdots,m$. 证明：

(1) $\bigcup_{i=1}^{m}A_i=[0,1)$；　　(2) $\bigcap_{i=1}^{m}A_i=[0,1/m)$.

证 用上述第二种(左右包含的)证法.

(1) 设 $x\in\bigcup_{i=1}^{m}A_i$，则有 i_0，$1\leqslant i_0\leqslant m$，使 $x\in A_{i_0}=[0,1/i_0)\in[0,1)$，即 $\bigcup_{i=1}^{m}A_i\subset[0,1)$.

又 $x\in[0,1)$，即 $x\in A_1\subset\bigcup_{i=1}^{m}A_i$，所以 $\bigcup_{i=1}^{m}A_i\supset[0,1)$.

综上即知 $\bigcup_{i=1}^{m}A_i=[0,1)$.

(2) 设 $x\in\bigcap_{i=1}^{m}A_i$，则对每个 i，$1\leqslant i\leqslant m$，都有 $x\in A_i=[0,1/i)$，于是 $x\in A_m=[0,1/m)$，故 $\bigcap_{i=1}^{m}A_i\subset[0,1/m)$.

设 $x\in[0,1/m)$，即 $0\leqslant x\leqslant 1/m$. 因为对每个 i，$1\leqslant i\leqslant m$，都有 $1/i\geqslant 1/m$，所以对每个 i 都有 $x\in[0,1/i)=A_i$. 于是可知，$x\in\bigcap_{i=1}^{m}A_i$，即 $\bigcap_{i=1}^{m}A_i\supset[0,1/i)$.

综上即知命题成立.

类似可证下列命题，请读者一试.

(1) 设 $A_n=[-1+1/n,1-1/n]$，$n=1,2,\cdots$. 证明：$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(-1,1)$.

(2)设$A_n=(n-1,n]$，$n=1,2,\cdots$. 证明：$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(0,\infty)$，$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$.

(3)设$A_n=(1-1/n,1/n)$，$n=1,2,\cdots$. 证明：$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(-1,1)$，$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{0\}$.

(4)设$A_n=(-1+1/n,1+1/n)$，$n=1,2,\cdots$. 证明：$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=[-1,1]$.

例8 证明：

(1)$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1\right)=(0,1)$；　　(2)$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n}\right)=\{1\}$.

证 (1)令$A_n=\left(\frac{1}{n},1\right)$. 显然，对任意$n\in\mathbf{N}$，有$A_n=\left(\frac{1}{n},1\right)\subset(0,1)$，故$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1\right)\subset(0,1)$.

又对$x\in(0,1)$，即$0<x<1$，存在$n_0\in\mathbf{N}$，使$\frac{1}{n_0}<x<1$，即$x\in\left(\frac{1}{n_0},1\right)=A_{n_0}$，于是$\bigcup_{n_0=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n_0},1\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1\right)\supset(0,1)$.

综上即知命题成立.

(2)令$A_n=\left(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n}\right)$. 设$x\overline{\in}\{1\}$，即$x\neq1$. 若$x<1$，则有$n_0\in\mathbf{N}$，使$x<1-\frac{1}{n_0}$，故$x\overline{\in}\left(\frac{n_0-1}{n_0},\frac{n_0+1}{n_0}\right)$，即$x\overline{\in}\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n}\right)$.

又对任意$n\in\mathbf{N}$，恒有$\frac{n-1}{n}<1<\frac{n+1}{n}$，即$1\in\left(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n}\right)$，$n=1,2,\cdots$. 故$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n}\right)\supset\{1\}$.

综上即知命题成立.

例9 设有集E与集族A_α，$\alpha\in I$. 证明：

$$E\cup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha).$$

证 因为若$x\in E\cup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)$，则$x\in E$ 或$x\in \bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$，即$x\in E$ 或$x\in A_\alpha$ $(\alpha\in I)$，于是 $x\in E\cup A_\alpha$ $(\alpha\in I)$，即 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)$，亦即 $E\cup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)$.

又若$x\in\bigcap_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)$，则$x\in E\cup A_\alpha(\alpha\in I)$，显然

$$\begin{cases}\text{若 } x\in E,\text{则 } x\in E\cup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha),\\ \text{若 } x\overline{\in} E,\text{则 } x\in A_\alpha(\alpha\in I),\text{从而 } x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha.\end{cases}$$

即$x\in E\cup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)$，亦即有$E\cup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)\supset\bigcap_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)$.

综上知命题成立.

文中A_α $(\alpha\in I)$是指对任意$\alpha\in I$ 的A_α.

例 10 证明：$(A-B)\cup B=A\Leftrightarrow A\supset B$.

证 **充分性** 设$A\supset B$，则$A\supset(A-B)\cup B$. 设$x\in A$，若$x\overline{\in}B$，则$x\in(A-B)\subset(A-B)\cup B$；若$x\in B$，则$x\in(A-B)\cup B$. 于是有$A\subset(A-B)\cup B$，综合知$(A-B)\cup B=A$.

必要性 用反证法. 设$x_0\in B$，但$x_0\overline{\in}A$，而$x_0\in(A-B)\cup B$，得到$(A-B)\cup B\neq A$，矛盾.

例 11 设A 是一集合，$\{A_n\}$，$\{B_n\}$是两个集列，证明：

(1)$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)=(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)$；

(2)$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)\subset(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)$；

(3)$A\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)$.

证 (1)因为对任意 $k\in\mathbf{N}$，恒有$(A_k\cup B_k)\subset(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)$，所以$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)\subset(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)$.

又设$x\overline{\in}\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)$，则对任意$n$ 恒有$x\overline{\in}A_n\cup B_n$，即对任意$n$ 恒有$x\overline{\in}A_n$，且$x\overline{\in}B_n$，亦即$x\overline{\in}\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 且$x\overline{\in}\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$，故$x\overline{\in}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\cup$

$(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)$. 综上所述，命题成立.

(2)因为对任意 $k\in\mathbf{N}$，恒有 $A_k\cap B_k\subset(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)\cap(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)$，所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)\subset(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)\cap(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)$.

(3)设 $x\in A\cap(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)$，则 $x\in A$，且 $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$，从而存在 $n_0\in\mathbf{N}$，使 $x\in B_{n_0}$ 且 $x\in A$，即 $x\in A\cap B_{n_0}$，于是 $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)$，故 $A\cap(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)$.

设 $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)$，则必有 B_{n_k}，使 $x\in A\cap B_{n_k}$，而 $B_{n_k}\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$，从而 $x\in A\cap(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)$，即 $A\cap(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)\supset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A\cup B_n)$. 综上所述，命题成立.

例 12 证明：

(1) $(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)\setminus B=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha\setminus B)$；　　(2) $(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)\setminus B=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha\setminus B)$.

证 (1)若 $x\in(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)\setminus B$，则 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 且 $x\overline{\in}B$，即存在某 $\alpha\in I$，使 $x\in A_\alpha$，但 $x\overline{\in}B$，故 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha\setminus B)$，从而等式成立.

(2)若 $x\in(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)\setminus B$，则 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 且 $x\overline{\in}B$，即对一切 $\alpha\in I$，$x\in A_\alpha$ 且 $x\overline{\in}B$，等价于 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha\setminus B)$，从而等式成立.

例 13 证明：$S\setminus\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(S\setminus A_\alpha)$.

证 设 $x\in S\setminus\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$，则 $x\in S$ 且 $x\overline{\in}\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$，即 $x\in S$，且存在某 $\alpha\in I$，使 $x\overline{\in}A_\alpha$. 故存在某 $\alpha\in I$，使 $x\in S\setminus A_\alpha$，从而等价于 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}(S\setminus A_\alpha)$.

例 14 对任意三集合 G,E_1,E_2，证明：

(1) $(G\setminus E_1)\cup(G\setminus E_2)=G\setminus(E_1\cap E_2)$；

(2) $(G\setminus E_1)\cap(G\setminus E_2)=G\setminus(E_1\cup E_2)$.

证 (1) $G\setminus(E_1\cap E_2)=G\cap(E_1\cap E_2)^C=G\cap(E_1^C\cup E_2^C)$

$$=(G\cap E_1^{C})\cup(G\cap E_2^{C})$$
$$=(G\backslash E_1)\cup(G\backslash E_2).$$

(2) $G\backslash(E_1\cup E_2)=G\cap(E_1\cup E_2)^{C}=G\cap(E_1^{C}\cap E_2^{C})$
$$=(G\cap E_1^{C})\cap(G\cap E_2^{C})$$
$$=(G\backslash E_1)\cap(G\backslash E_2).$$

例 15 设 E_1,E_2,G 为三集合,且 $E_1\subset G$. 证明:
$$E_1\backslash E_2=G\backslash[(E_1\cap E_2)\cup(G\backslash E_1)].$$

证 因为 $E_1\subset G$,所以

$G\backslash[(E_1\cap E_2)\cup(G\backslash E_1)]$

$=G\cap\{[E_1\cup(G\backslash E_1)]\cap[E_2\cup(G\backslash E_1)]\}^{C}$

$=G\cap\{G\cap[E_2\cup(G\cap E_1^{C})]\}^{C}=G\cap[(G\cap E_2)\cup(G\cap E_1^{C})]^{C}$

$=G\cap[G\cap(E_2\cup E_1^{C})]^{C}=G\cap[G^{C}\cup(E_2\cup E_1^{C})^{C}]$

$=G\cap(E_2^{C}\cap E_1)=E_1\cap E_2^{C}=E_1\backslash E_2.$

例 16 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数,则对任意实数 β,有
$$\{x:f(x)=\beta\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x:\beta\leqslant f(x)<\alpha+1/n\}.$$

证 设 $x_0\in\{x:f(x)=\beta\}$,即有 $f(x_0)=\beta$. 故对任意 $m\in\mathbf{N}$,有 $\beta\leqslant f(x_0)<\beta+\dfrac{1}{m}$,即有 $x_0\in\{x:\beta\leqslant f(x_0)<\beta+1/m\}$,所以 $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x:\beta<f(x)<\alpha+1/n\}$,即左$\subset$右.

又设 $x_0\overline{\in}\{x:f(x)=\beta\}$. 若 $f(x_0)>\beta$,则必有 $n_0\in\mathbf{N}$,使 $f(x_0)\geqslant\beta+1/n_0$,从而 $x_0\overline{\in}\{x:\beta\leqslant f(x)<\beta+1/n_0\}$,所以 $x_0\overline{\in}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x:\beta\leqslant f(x)<\beta+1/n\}$. 若 $f(x_0)<\beta$,则显然对任意 $m\in\mathbf{N}$,恒有 $x_0\overline{\in}\{x:\beta\leqslant f(x)<\beta+1/m\}$,即 $x_0\overline{\in}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x:\beta\leqslant f(x)<\beta+1/n\}$.

综上所述,命题成立.

例 17 设已给集 A,并已知 $A\triangle X=A$,证明:$X=\varnothing$.

证 由 $A\triangle X=A$ 知,$(A\cap X^{c})\cup(A^{c}\cap X)=A$,故 $A^{c}\cap X=\varnothing$,即 X 不在 A 中的部分是空集. 又 $A\cap X^{c}=A$,得 $X^{c}\supset A$,即 $X\cap$

$A=\varnothing$，也就是X在A中的部分也是空集．所以，可以确定$X=\varnothing$．

例18 证明：(1)$A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$；

(2)$A\triangle B=(A\cap B^{c})\cup(B\cap A^{c})$．

证 (1)$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

$=[A\setminus(A\cap B)]\cup[B\setminus(B\cap A)]$

$=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$．

(2)$(A\cap B^{c})\cup(B\cap A^{c})=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\triangle B$．

例19 设有集列$\{E_n\}$，作集列$\{D_n\}$如下：

$$D_1=E_1,D_2=D_1\triangle E_2,\cdots,D_{n+1}=D_n\triangle E_{n+1},\cdots$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}D_n$存在的充要条件是$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=\varnothing$．

证 **充分性** 设$\lim\limits_{n\to\infty}E_n=\varnothing$，等价于$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=\varnothing$，证$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}D_n\subset\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}D_n$．对任一$x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}D_n$，取$N$，使$n\geqslant N$时，$x\,\overline{\in}\,E_n$，再取$n_0$，使$n_0>N$且$x\in D_{n_0}$，依$\{D_n\}$定义，即有$x\in D_n$，从而$x\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}D_n$．所以$\lim\limits_{n\to\infty}D_n$存在．

必要性 设$\lim\limits_{n\to\infty}D_n$存在，要证$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=\varnothing$，即要证任何$x$只属于有限多个$E_n$．用反证法．设某个$x$属于无限多个$E_n$，则有两种情形：(1)$x$仅属于有限个$D_n$．此时取$N$，使$n\geqslant N$时，$x\,\overline{\in}\,D_n$．取$n_0$，使$n_0\geqslant N$时，$x\in E_{n_0+1}$，则$x\in D_{n_0+1}=D_{n_0}\triangle E_{n_0+1}$，引出矛盾．(2)$x$属于无限个$D_n$，即$x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}D_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}D_n$，于是存在$n_0$，使$n\geqslant n_0$时$x\in D_n$．于是，由$D_n$的定义，$x\,\overline{\in}\,E_{n+1}(n>n_0)$，又引出矛盾．综合即知$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=\varnothing$．

例20 设$A_{2n-1}=(0,1/n)$，$A_{2n}=(0,n)$，$n=1,2,\cdots$，求出集列$\{A_n\}$的上限集与下限集．

解 对$A_{2n-1}=(0,1/n)$，$A_{2n}=(0,n)$ $(n=1,2,\cdots)$，有$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=(0,\infty)$．又对任何$x\in(0,\infty)$，存在自然数$n_0$，当$n\geqslant n_0$时，$x>1/n$，即$x\,\overline{\in}\,A_{2n-1}$．故$x\,\overline{\in}\,\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$．这时，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\varnothing$．同时，显然

对任何n,都有$\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m=(0,\infty)$,于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m=\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,\infty)=(0,\infty),$$

所以有
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=(0,\infty),\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\varnothing.$$

例 21 设集列$\{A_n\}$是单调减少的,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

证 要证$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

因为$\{A_n\}$是单调减少的,$\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m=A_n$,所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n.$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$存在,且等于$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

例 22 证明:$S\setminus\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(S\setminus A_n)$.

证
$$S\setminus\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=S\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m=\bigcap_{n=1}^{\infty}(S\setminus\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}(S\setminus A_m)$$
$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}(S\setminus A_n).$$

例 23 对于每个自然数n,A_n表示分母为n的有理数全体,证明:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\mathbf{Q},\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\mathbf{Z}.$$

式中$\mathbf{Q}$表示有理数全体,$\mathbf{Z}$表示整数全体.

证 对一切自然数n,显然有$\mathbf{Q}\supset A_n\supset A_1=\mathbf{Z}$,所以$\mathbf{Q}\supset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\supset\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\supset\mathbf{Z}$.

因为对任一有理数q/p,其中p,q均为整数,$p>0$,且$q/p=(qn)/(pn)\in A_{pn}$,$n=1,2,\cdots$. 所以q/p属于无穷多个A_n,即属于$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,从而$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\mathbf{Q}$.

又对$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$中的任一元素均可写成既约分数$q/p$的形式,其中$p,q$是整数,$p>0$且$p,q$互质. 因为$q/p\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,所以必有$N\in$

$\mathbf{N}$，使$n>N$时，$q/p\in A_n$. 若取质数$n_0\geqslant N$，因$q/p\in A_n$，一定有整数m，使$q/p=m/n_0$，从而$n_0q=mp$. 于是n_0必能被p整除，由于n_0为质数，所以$p=1$，即$q/p=q\in\mathbf{Z}$. 故证得$\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n=\mathbf{Z}$.

第二节　映射与基数(势)

主要内容

一、映射

1. 设X,Y为两个非空集合，若对每个$x\in X$，都有惟一的$y\in Y$与之对应，则称这个对应为映射(变换或函数)，记做$f:X\to Y$，并称f是从X到Y的一个映射. $x\in X$在Y中对应的y称为x在映射f下的(映)像，x称为y的一个原像，记做$y=f(x)$.

2. 若对每一个$y\in Y$，均有$x\in X$，使得$y=f(x)$，则称此f为从X到Y的满射(也定义为：如果映射f满足$f(X)=Y$，称f是X到Y的满射).

3. 对于$f:X\to Y$以及$A\subset X$，记

$$f(A)=\{y\in Y:x\in A,y=f(x)\},$$

称$f(A)$为集合A在映射f下的映像集($f(\varnothing)=\varnothing$). 有：$f(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$，$f(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$.

4. 对于$f:X\to Y$以及$B\subset Y$，记

$$f^{-1}(B)=\{x\in X:f(x)\in B\},$$

称$f^{-1}(B)$为集合B关于f的原像集. 有：

若$B\subset A$，则$f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A)$；$f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$；

$$f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha);\quad f^{-1}(B^{C})=[f^{-1}(B)]^{C}.$$

5. 设$f:X\to Y$. 当$x_1,x_2\in X$，且$x_1\neq x_2$时，有$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称f是从X到Y的一个单射.

若f既是单射又是满射，则称f是X到Y上的一一映射. 在一

一映射下，映射 $g:Y\to X$ 称为 f 的逆映射，记做 f^{-1}，其中 x 由关系 $y=f(x)$ 确定．一一映射又称双射．

6．设 $f:X\to Y$，$g:Y\to W$，则由 $h(x)=g[f(x)]$，$x\in[x]$ 定义的 $h:X\to W$ 称为 g 与 f 的复合映射．

二、对等

1．设有集合 A,B，若存在一个从 A 到 B 上的一一映射，则称集合 A 与 B 对等，记做 $A\sim B$．

2．对等关系有如下基本性质．

(1)自反性　$A\sim A$；

(2)对称性　若 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

(3)传递性　若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$．

3．集合在映射下的分解定理：若有 $f:X\to Y$，$g:Y\to X$，则存在分解

$$X=A\cup A^{\sim},\quad Y=B\cup B^{\sim},$$

其中 $f(A)=B$，$g(B^{\sim})=A^{\sim}$，$A\cap A^{\sim}=\varnothing$，$B\cap B^{\sim}=\varnothing$．

4．康托尔-伯恩斯坦(Cantor-Bernstein)定理　若集合 X 与 Y 的某个真子集对等，Y 与 X 的某个真子集对等，则 $X\sim Y$．

特别地，设集合 A,B,C 满足 $C\subset A\subset B$，若 $B\sim C$，则 $B\sim A$．

三、势(基数)

1．设 $M_n=\{1,2,\cdots,n\}$，A 是一个集合．如果 A 是一个空集或与某个 M_n 对等，则称 A 为有限集，并称 n 为 A 的计数．空集的计数规定为零，不是有限集的集称为无限集．

M_n 不能与它的真子集对等．

集合 A 为有限集的充要条件是 A 决不与其真子集对等，集合 A 为无限集的充要条件是 A 必能与其某些真子集对等．

有限集的计数是惟一的．

2．在对一切集合进行分类时，规定彼此对等的集归为一类，不对等的集属于不同的类．赋予每一个这样的类一个记号，称之为这类集合中任一集合的势(或基数)，用 $\overline{\overline{A}}$ 来表示集合 A 的势．对有

限集，$\overline{\overline{A}}$ 就是它的计数.

3. 伯恩斯坦定理：设 A，B 是二集合，$\overline{\overline{A}}$ 与 $\overline{\overline{B}}$ 分别是 A 与 B 的势，若 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$，则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

四、可列集

记自然数集 **N** 的基数为 $\aleph_0$（$\aleph$ 读做阿列夫（Aleph），是希伯莱字母，$\aleph_0$ 读做阿列夫零）. 若集合 A 的基数为 $\aleph_0$，则 A 是可列集，即 $A\sim\mathbf{N}$. 可列集可以记做

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

1. 任一无限集 E 必包含一可列子集.

2. 若 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 为可列集，则并集

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \quad 或 \quad A=\bigcup_{n=1}^{m}A_n$$

都是可列集.

3. 可列集的任何子集，若不是有限集便是可列集，则称其子集是至多可列的.

4. 如果集 A 是由有限个指标所决定的元素 $a_{X_1\cdots X_n}$ 的全体，其中每个指标 X_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 在有限集或可列集上独立变化，则 A 必为有限集或可列集.

5. 设 A 是无限集且其基数为 a，若 B 是可数集，则 $A\cup B$ 的基数仍为 a.

五、不可数集

1. $[0,1]=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$ 是不可数集.

2. 称 $\mathbf{R}^1$ 的基数为连续基数，记做 c，$c>\aleph_0$.

3. 设有集合列 $\{A_k\}$，若每个 A_k 的基数都是连续基数，则其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ 的基数是连续基数.

4. 无最大基数定理：若 A 是非空集合，则 A 与共幂集 $\mathscr{P}(A)$（由 A 的一切子集所构成的集合族）不对等.

5. 基数运算规律

（1）设有基数 α_1 与 α_2，取集合 A_1 与 A_2，使 $\overline{\overline{A}}_1=\alpha_1$，$\overline{\overline{A}}_2=\alpha_2$，且 A_1

$\cap A_2=\varnothing$,则集合 A_1+A_2 的基数是 $\alpha_1+\alpha_2$.

(2)设有基数 α_1 与 α_2,取集合 A_1 与 A_2,使 $\overline{\overline{A}}_1=\alpha_1$,$\overline{\overline{A}}_2=\alpha_2$,则直积集 $A_1\times A_2$ 的基数是 $\alpha_1\cdot\alpha_2$. n 个相同基数的乘积 $\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n}=a^n$.

(3)设有集合 A 与 B,$\overline{\overline{A}}=\alpha$,$\overline{\overline{B}}=\beta$,记从 B 到 A 的一切映射所构成的集合是 A^B,则 A^B 的基数是 α^β.

6. $c=2^{\aleph_0}$.

7. 设 A 是一个不可数集,B 是 A 的有限子集或可列子集,则 $A\backslash B\sim A$.

因而,开区间 $(0,1)$ 的基数也是 c(也记做 $\aleph$).

8. 闭区间 $[a,b]$ 的基数是 c. 因而 (a,b),$[a,b)$,$(a,b]$ 均有基数 c.

9. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一列两两互不相交的集合,且它们的基数都是 c,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的基数也是 c. $(0,\infty)$,$[0,\infty)$,$(-\infty,0)$,$(-\infty,0]$ 的基数都是 c.

疑 难 解 析

1. 对等概念的数学意义是什么?

答 需要考察两个集合间元素的多少与元素间的关系有两种办法:一种是分别数数的办法,但对无限集合就行不通了;一种是一一配对法,即让一个集合的元素与另一个集合的元素进行一一配对. 对于两个有限集合,如果它们的元素相等,就能建立一一对应关系;反之,如果两个集合的元素有一一对应关系,则它们所含元素的个数相等. 对于无限集也是这样,为此引入集合的"对等"概念.

利用映射概念给两个集合的对等下的定义是:如果 A,B 是非空集合,存在一个从 A 到 B 的一一对应(双射),则称 A 和 B 对等. 对等意味着两个集合有同样多的元素.

对于有限集，它的元素一定不能与其真子集有同样多的元素，是显然的，所以有限集必不与其真子集对等. 对于无限集，则必与其某些真子集对等，即无限集与其真子集有相同多的元素，似乎不好理解，但却是可以证明的事实.

2. 什么是基数(势)？可列无限集的基数与不可数集的基数有什么不同？

答 在把一切集合进行分类时，规定彼此对等的集为同一类，不对等的集属于不同的类. 赋予这样的每个集类的一个记号，称为这类集合中任一集合的基数(势). 用$\overline{A}$表示集合A的势.

有限集的基数就是它的计数.

注意到，基数(势)是一切彼此对等的集之间的一种共同属性，是有限集的计数概念的推广. 但是，基数的大小虽然意味着集合中元素个数的"多少"，但当$A\supset B$时，不一定有$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$. 例如偶数集$D$是自然数集$\mathbf{N}$的子集，但是$D$与$\mathbf{N}$对等，因而有$\overline{\overline{D}}=\overline{\overline{\mathbf{N}}}$.

可列无限集的基数是$\aleph_0$.

不可数集的基数是c或$\aleph$，$c=2^{\aleph_0}$. 显然$c>\aleph_0$.

无限集基数运算与有限的个数运算是不同的. 有$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$，$\aleph_0^n=\aleph_0$.

方法、技巧与典型例题分析

一、映射与对等

作映射，一定从两个集合(包括区间)的对应关系来考虑，寻找一个适当的函数，可以是实函数，也可以是复函数. 如果是满射，要考虑一一对应性. 关于验证两个集合的对等，关键是找出一个存在于两集合间的双射.

例 1 设$C[0,1]$是$[0,1]$上所有连续函数的全体，$\mathbf{R}^1=(-\infty,\infty)$，作从$C[0,1]$到$\mathbf{R}^1$的一个映射.

解 取$x_0\in[0,1]$，作映射$\varphi: f\to f(x_0)$，$f\in[0,1]$. 则φ是$C[0,1]$到$\mathbf{R}^1$的映射.

例 2 作满足下列条件的映射：

(1)从单位圆周到$[0,1]$的单射；

(2)从$[0,1]$到整个数轴的单射；

(3)从正实数集合P到实数集合$\mathbf{R}$的双射；

(4)从$(-1,1)$到$(-\infty,\infty)$的双射.

解 (1)对任一非零复数z，取其幅角的主值$\arg z$，$0\leqslant \arg z<2\pi$. 此时$z\to\frac{1}{2\pi}\arg z$就是从单位圆周到区间$[0,1]$的一个单射(不是满射).

(2)作$x\to x$，是从$[0,1]$到整个数轴的一个单射(不是满射).

(3)作$x\to \ln x$，是从P到$\mathbf{R}$的一个双射.

(4)作$x\to\tan\frac{\pi x}{2}$，是从$(-1,1)$到$(-\infty,\infty)$的一个双射.

例 3 证明下列集合对等：

$(0,1)\sim(a,b)$，$(0,1)\sim(0,\infty)$，$(-1,1)\sim(-\infty,\infty)$.

解 因为存在以下双射：

$f:x\to a+bx$，是从$(0,1)$到(a,b)的双射，

$f:x\to\tan\frac{\pi x}{2}$，是从$(0,1)$到$(0,\infty)$的双射，

$f:x\to\tan\frac{\pi x}{2}$，是从$(-1,1)$到$(-\infty,\infty)$的双射.

所以$(0,1)\sim(a,b)$，$(0,1)\sim(0,\infty)$，$(-1,1)\sim(-\infty,\infty)$.

例 4 证明：将圆周除去一点后余下点组成的集与实数集对等.

证 如图1.2所示，设圆周C与实轴相切于$P_0=0$，除去的点P是过P_0垂直于实轴的直线与C的交点. 过C上除去点P后的任一点c，作cP交实轴于x. 则

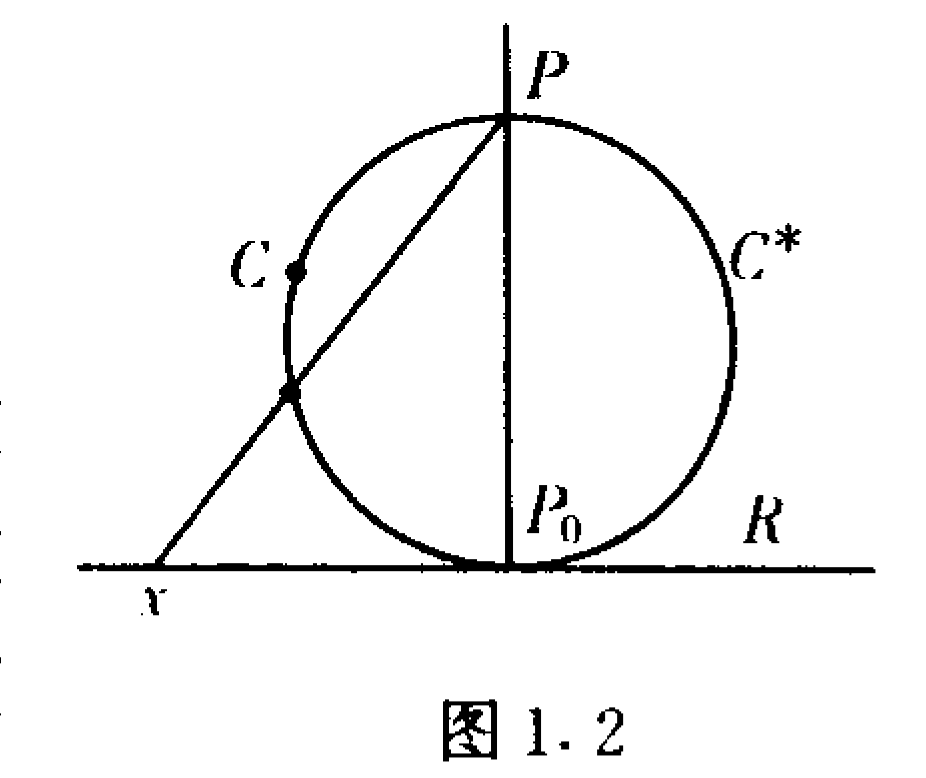


图 1.2

$f:c\to x$是集合C^* $(C^*=C-P)$到实数集的一个双射，所以C^*与实数集对等.

类似可以证明，将球面去掉一点后余下点组成的集合与整个平面上的点所组成的集合是对等的.

例5 证明：单位圆周与整个数轴对等.

证 记单位圆周为C，映射$f:z\to\frac{1}{2\pi}\arg z$是$C$到$[0,1)$的双射，则$C\sim[0,1)$. 又映射$\varphi:x\to\frac{x+1}{2}$是从$(-1,1)$到$(0,1)$的双射，再由例3中$(-\infty,\infty)\sim(-1,1)$得

$$C\sim[0,1)\subset(-\infty,\infty),$$

$$(-\infty,\infty)\sim(-1,1)\sim(0,1)\subset[0,1),$$

由伯恩斯坦定理可知，$C\sim(-\infty,\infty)$.

二、可列集与不可数集

证明集合是可列集，可以利用某个已知集是可列集和所证集与已知集之间的关系(对等、并集、差集)来证，有时还可以将所证集分解(如例6、例7等)或利用定理(如将集中元素用自然数的有序数组表示)来证，但比较复杂. 不可数集的证明比较麻烦，可以利用作映射使与已知不可数集构成双射外，更多的需要一定的技巧与集合论的知识，请读者在后面的例题中体会.

例6 证明：有理数集$\mathbf{Q}$是可列集.

证 首先，分别用$\mathbf{Q}^+$与$\mathbf{Q}^-$表示正有理数集和负有理数集. 显然，有$\mathbf{Q}^+\sim\mathbf{Q}^-$，且$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^+\cup\mathbf{Q}^-\cup\{0\}$.

证明$\mathbf{Q}^+$是可列集. 因为每个有理数r都可写成既约分数形式$r=p/q(q>0)$，所以令$A_m=\{1/m,2/m,\cdots,n/m,\cdots\}$，$m=1,2,\cdots$. 显然，对每个固定的$m$，$A_m$是可列集. $\mathbf{Q}^+=\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m$，由前面所述的主要内容知，$\mathbf{Q}^+$是可列集.

因为$\mathbf{Q}^-\sim\mathbf{Q}^+$，所以$\mathbf{Q}^-$也是可列集. 于是$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^+\cup\mathbf{Q}^-\cup\{0\}$是可列集.

例7 设集A中的元素均可用有限多个自然数作成的(有序)数组来标号，即A中元素可写成$a_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$的形式，式中$n_1,n_2,\cdots,n_k$

均为自然数，k 是任意自然数．证明：A 是有限集或可列集．

证 设 A 中元素的每个指标均在可列集上变化，则可用数学归纳法证明 A 是可列集．

当 $k=1$ 时，定理显然成立．

设 $k=m$ 时，定理是成立的．设 $k=m+1$，固定最后一个指标 n_{m+1}，由归纳假设 $A_{n_{m+1}}=\{a_{n_1\cdots n_{m+1}}\}$ 为一可列集．而 $A=\bigcup_{n_{m+1}}^{\infty}A_{n_{m+1}}$ 是可列集之并，所以 A 是可列集．

类似可以讨论指标在有限集上变化情形．

例 8 由有限个自然数构成的有序数组的全体是可列集．

证 因为对每一个数 n，n 个自然数的有序数组的全体与 $\mathbf{N}^n$ 对等．从而 $A\sim\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbf{N}^n$，而 $\mathbf{N}^n\sim\mathbf{N}$，所以 A 的基数是 $\aleph_0$．

例 9 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的实值函数，则集合

$$\{x\in\mathbf{R}^1: f \text{ 在点 } x \text{ 不连续但右极限 } f(x+0) \text{ 存在(有限)}\}$$

是可数集．

证 令 $S=\{x\in\mathbf{R}^1: f(x+0)\text{存在(有限)}\}$．对每个自然数 n，作

$$E_n=\{x\in\mathbf{R}^1:\exists\ \delta>0,\text{当 } x',x''\in(x-\delta,x+\delta)\text{ 时，有 } |f(x')-f(x'')|<1/n\},$$

显然，$\bigcap_{n=1}E_n$ 是 $f(x)$ 的连续点集，所以只要证明 $S\setminus E_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 是可数集．

对任意取定的 n，设 $x\in S\setminus E_n$，可知存在 $\delta>0$，使

$$|f(x')-f(x+0)|<1/(2n),\quad x'\in(x,x+\delta).$$

当 $x',x''\in(x,x+\delta)$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<1/n$，即知 $(x,x+\delta)\subset E_n$．说明集合 $S\setminus E_n$ 中的每一 x 点都是某开区间 $I_x=(x,x+\delta)$ 的左端点，且 I_x 与 $S\setminus E_n$ 不相交．从而当 $x_1,x_2\in S\setminus E_n$ 且 $x_1\neq x_2$ 时，有 $I_{x_1}\cap I_{x_2}=\varnothing$，于是区间族 $\{I_x:x\in S\setminus E_n\}$ 是可数集，所以 $S\setminus E_n$ 是可数集．

例 10 整系数多项式的全体是可列集．

证 利用例7的结果与可列集的并仍是可列集的定理.

记整数集为I,n次多项式$\sum_{i=0}^{\infty}a_i x^i$为$p_{a_0\cdots a_n}$,则整系数多项式的全体为集合

$$\{p_{a_0\cdots a_n}:a_0,\cdots,a_n\in I,n=0,1,\cdots\}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{p_{a_0\cdots a_n}:a_0,\cdots,a_n\in I\},$$

所以由前述结果知,整系数多项式全体是一个可列集.

例11 证明以下命题:

(1)实数集的基数是$\aleph$; (2)无理数集的基数是$\aleph$;

(3)实数列全体的基数是$\aleph$; (4)n维欧氏空间的基数是$\aleph$.

证 (1)因(0,1)的基数与[0,1]的基数相同. 作从(0,1)到$(-\infty,\infty)$的映射

$$f:x\to\tan(x-1/2)\pi,$$

则f是从(0,1)到$(-\infty,\infty)$的双射. 所以实数集的基数是$c=\aleph$.

(2)设无理数集为I,有理数集为$\mathbf{Q}$,则$I\cup\mathbf{Q}=(-\infty,\infty)$,故

$$\overline{\overline{I}}=\overline{\overline{I\cup\mathbf{Q}}}=\overline{\overline{(-\infty,\infty)}}=\aleph.$$

由于$\mathbf{Q}$的基数是$\aleph_0$,而$\aleph=2^{\aleph_0}$,所以无理数要比有理数多得多.

(3)实数列全体记做$\mathbf{R}^\infty$,以B记$\mathbf{R}^\infty$中适合$0<x_n<1$ $(n=1,2,\cdots)$的点$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$的全体. 记$x=\{x_1,\cdots,x_n,\cdots\}$,$x\in B$. 作映射

$$f:B\to\mathbf{R}^\infty,x\to\{\tan(x_1-\frac{1}{2})\pi,\cdots,\tan(x_n-\frac{1}{2})\pi,\cdots\},$$

则f是从B到$\mathbf{R}^\infty$的双射,所以$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{\mathbf{R}}}^\infty$.

将(0,1)中任何x与B中点$\tilde{x}=\{x,\cdots,x,\cdots\}$对应,即知(0,1)对等$B$的一个子集,故$\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{(0,1)}}$.

又对B中任一$x=\{x,\cdots,x,\cdots\}$,用十进位数表示每个x_n,有

$$x_1=0.x_{11}x_{12}\cdots x_{1n}\cdots,$$

$$x_2=0.x_{21}x_{22}\cdots x_{2n}\cdots,$$

$$\vdots$$

$$x_n=0.x_{n1}x_{n2}\cdots x_{nn}\cdots.$$

由于上述一列数$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}\in B$，作一个十进位小数$\varphi(x)=0.x_{11}x_{21}x_{12}\cdots x_{n1}x_{n-1,2}\cdots x_{1n}\cdots$. 显然$\varphi(x)\in(0,1)$，且当$x\neq y$时，$\varphi(x)\neq\varphi(y)$. 从而由映射$\varphi:B\to(0,1)$知，$B$与$(0,1)$的一个子集对等，即$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{(0,1)}}$. 综合即知$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{(0,1)}}=\aleph$. 故$\overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}}=\aleph$.

(4)建立$\mathbf{R}^n$中点$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$与$\mathbf{R}^\infty$中点$\{x_1,x_2,\cdots x_n,0,\cdots,0\}$的对应，即知$\mathbf{R}^n\sim\mathbf{R}^\infty$的一个子集. 又$\mathbf{R}^\infty\sim\mathbf{R}^1$，但建立$\mathbf{R}^1$中点$x$与$\mathbf{R}^n$中点$\{x,0,\cdots,0\}$的对应，又知$\mathbf{R}^1\sim\mathbf{R}^n$的一个子集. 综上即知$\overline{\overline{\mathbf{R}^n}}=\overline{\overline{\mathbf{R}^1}}=\aleph$.

例 12 设代数数(整系数多项式的根)的集合为A，超越数(不是代数数的实数)的集合为B，证明：$\overline{\overline{A}}=\aleph_0$，$\overline{\overline{B}}=c$.

证 由例10已证整系数多项式的集合是可列的，而每个整系数多项式的根是有限的，故A是有限个可列集的并，所以A是可列集，故$\overline{\overline{A}}=\aleph_0$.

因为$\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{(-\infty,\infty)}}$，所以$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{(-\infty,\infty)}}=\aleph=c$.

例 13 证明下列命题：

(1)设$\overline{\overline{A}}=\aleph_0$，则$\overline{\overline{\mathscr{P}(\mathbf{N})}}=2^{\aleph_0}$；　　(2)设$\overline{\overline{\mathscr{P}(\mathbf{N})}}=c$.

证 (1)当Y是$\mathbf{R}^1$时，我们称映射$f:X\to Y$为函数，对X的子集A，作

$$f_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in X\setminus A,\end{cases}$$

则称$f_A(x)$是X的子集A的特征函数.

因$2^{\aleph_0}$是集合$\{0,1\}^A$的基数，而$\{0,1\}^A$是所有定义在A上的特征函数所构成的集合. 对A的每个子集均对应一个特征函数$f_E(x)$，反过来也成立，所以$\mathscr{P}(A)\sim\{0,1\}^A$. 即$\overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}=2^{\aleph_0}$.

(2)作映射$f:\mathscr{P}(\mathbf{N})\to\mathbf{R}^1$，对$A\in\mathscr{P}(\mathbf{N})$，

$$f(A)=\begin{cases}\sum\limits_{n\in A}2^{-n}, & \mathbf{N}\setminus A\text{ 是无限集},\\ \sum\limits_{n\in A}2^{-n}+1, & \mathbf{N}\setminus A\text{ 是有限集}.\end{cases}$$

又存在满射 $g:\mathscr{P}(Z)\to\mathbf{R}^1$，对 $B\in\mathscr{P}(\mathbf{N})$，

$$g(B)=\begin{cases}\lg\left(\sum_{n\in A}2^{-n}\right), & A\text{ 有下界},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以，$\overline{\overline{\mathscr{P}(\mathbf{N})}}=c$.

例 14 证明下列命题：

(1)$\mathbf{R}^1$ 上有限实函数的第一类不连续点至多是可列的；

(2)闭区间 $[a,b]$ 上任何单调函数的不连续点至多是可列的.

证 (1)设 f 是定义于实轴上的实值函数，x_0 是 f 的第一类间断点. 记有理数全体为 $\{r_1,r_2,\cdots\}$，则集合

$$\{x:\lim_{y\to x^+}f(y)\neq\lim_{y\to x^-}f(y)\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,$$

其中 $A_k=A_k^{(1)}\cup A_k^{(2)}$，$A_k^{(1)}=\{x:\lim_{y\to x^+}f(y)<r_k<\lim_{y\to x^-}f(y)\}$，$A_k^{(2)}=\{x:\lim_{y\to x^+}f(y)>r_k>\lim_{y\to x^-}f(y)\}$，要证 $A_k^{(1)}$ 至多可列.

对 $x\in A_k^{(1)}$，取 $\varepsilon>0$，使 $\lim_{y\to x^+}f(y)+\varepsilon<r_k<\lim_{y\to x^-}f(y)$. 因为 $\lim_{y\to x^+}f(y)$ 存在，可取 $\delta_k>0$，使当 $y\in(x,x+\delta_k)$ 时，

$$f(y)<\lim_{y\to x^+}f(y)+\varepsilon<r_k.$$

所以，对 $z\in(x,x+\delta_k)$，若极限 $\lim_{y\to z^-}f(y)$ 存在，必有 $\lim_{y\to z^-}f(y)\leqslant r_k$. 可见，有 $z\overline{\in}A_k^{(1)}$，即 $(x,x+\delta_k)\cap A_k^{(1)}=\varnothing$，因此，集合 $\{(x,x+\delta_k),x\in A_k^{(1)}\}$ 是一族互不相交的开区间，必为有限或可列，即 $A_k^{(1)}$ 至多可列. 同理，$A_k^{(2)}$ 至多可列. 于是知，f 的第一类不连续点至多可列.

(2)设 f 是 $[a,b]$ 上的单调增加函数(单调减少类似可证).

先证明 f 的不连续点是第一类的. 对任何 $x_0\in[a,b)$，可取到自然数 N，使当 $n>N$ 时，$x_0+1/n\in[a,b)$. 由 f 的单调性，可知数列 $\{f(x_0+1/n)\}$ 是单调减少的，有下界 $f(x_0)$，所以存在极限，设为 r，显然 $r\geqslant f(x_0)$. 又因为 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_0$，使 $0\leqslant f(x_0+1/N_0)-\tau<\varepsilon$，所以，对任何 $x\in(x_0,x_0+1/N_0)$，有 $0\leqslant f(x)-\tau\leqslant f(x_0+1/N_0)-$

$\tau<\varepsilon$,即 $\tau=f(x_0+0)$. 类似可证,对任何 $x_0\in(a,b]$,$f(x_0-0)$存在.

从上面证明中可以得出 $f(x-0)\leqslant f(x)\leqslant f(x+0)$对一切 $x\in(a,b)$成立,而 $f(a)\leqslant f(a+0)$,$f(b-0)\leqslant f(b)$. 所以,可以确定:对任何 $x\in[a,b]$,它的左、右跃度都是非负的. 于是知,f 的不连续点是第一类的.

记f 的不连续点为E,要证E 至多是可列的. 对任何$c>0$,记$E_c=E[f(x+0)-f(x-0)\geqslant c]$,则对任何 $x\in E$,$\exists\, n\in\mathbf{N}$,使 $f(x+0)-f(x-0)\geqslant 1/n$,即 $x\in E_{1/n}$,所以 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_{1/n}$.

设$c>0$,任取 $x_1,x_2,\cdots,x_p\in E_c$,不妨设 $a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_p\leqslant b$,再取分点$\{\xi_i\}$,使得 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$,$i=1,2,\cdots,p-1$,$\xi_0=a$,$\xi_p=b$. 因为$f$ 单调,且$\xi_{i-1}\leqslant x_i\leqslant\xi_i$,所以 $f(\xi_{i-1})\leqslant f(x_i-0)\leqslant f(x_i+0)\leqslant f(\xi_i)$,从而 $f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})\geqslant f(x_i+0)-f(x_i-0)$. 于是

$$
\begin{aligned}
cp&\leqslant\sum_{i=0}^{p}[f(x_i+0)-f(x_i-0)]\leqslant\sum_{i=0}^{p}[f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})]\\
&=f(\xi_p)-f(\xi_0)=f(b)-f(a).
\end{aligned}
$$

得出$p\leqslant\dfrac{1}{c}[f(b)-f(a)]$,即知$E_c$ 中点的个数是有限的. 因而E 中的点至多是可列的.

例 15 证明下列命题:

(1)直线上以有理点为心,有理数为半径的所有开区间组成的集族是可列的.

(2)直线上以有理点为端点的所有开区间组成的集族是可列的.

证 (1)因为有理数集是可列集,所以,以有理点为心,有理数为半径的开区间,可以用由两个自然数(一个代表心,一个代表半径)组成的(有序)数组来表示. 依例 7 结论,上述开区间集族是可列的.

(2)若将全部有理点排列为 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$,则对每个 r_n ($n=$

1,2,…)及所有的有理点 $r>r_n$，开区间集族 $E_n=\{(r_n,r):r_n<r\}$ 显然是可列的．而所有以有理点为端点的开区间集族是可列个可列集族的并集，所以也是可列的．

例 16 设 A 是任意集合，A 的所有子集构成的集合为 $\mathscr{A}=\{E:E\subset A\}$，证明：$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{\mathscr{A}}}$．

证 即要证 A 与 $\mathscr{A}$ 的一个子集对等，但 A 不和 $\mathscr{A}$ 对等．可分两步证：

(1)设 $x\in A$，则 $\{x\}\subset A$，故 $\{x\}\in\mathscr{A}$，令 $\mathscr{B}=\{\{x\}:x\in A\}\subset\mathscr{A}$，作映射 $f:A\to\mathscr{B},x\to\{x\}$，则 f 是双射，所以 $A\sim\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$．

(2)反证法．设 $A\sim\mathscr{A}$，则存在双射 $g:A\to\mathscr{A},a\to M_a$．而 $a\in A,M_a\in\mathscr{A},M_a$ 是 A 的子集，故 $a\in M_a$ 或 $a\overline{\in}M_a$．

如果令 $M'=\{x:x\in A,x\to M_x,x\overline{\in}M_x\}$，则 $M'\neq\varnothing$(因为 A 中与 $\varnothing\in\mathscr{A}$ 对应的元素在 M' 中)，且 $x\in M'\Leftrightarrow x\overline{\in}M_x$．又 $M'\subset A$，即 $M'\in\mathscr{A}$，故有 $a'\in A$，使 $a'\to f(a')=M'$，即 $M'=M_{a'}$．于是，若 $a'=M'$，则由充要条件有 $a'\overline{\in}M'_a$，而由上式有 $a'\in M'$，推出矛盾．

若 $a'\overline{\in}M'$，则由上式有 $a'\overline{\in}M_{a'}$，与充要条件 $a'\in M'$ 矛盾．

综合知 $a'\in M'$ 与 $a'\overline{\in}M'$ 均不成立，而这是不可能的，所以 A 与 $\mathscr{A}$ 不对等．从而定理得证．

例 17 设 $A=A_1\cup A_2,\overline{\overline{A}}=\aleph$，证明：$\overline{\overline{A}}_1=\aleph$ 或者 $\overline{\overline{A}}_2=\aleph$．

证 用反证法．设 $\overline{\overline{A}}_1<\aleph,\overline{\overline{A}}_2<\aleph$．

作双射 $f:A\to\mathbf{R}^2$，在假设下应有

$$\{x:\text{存在 }y,\text{使}(x,y)\in f(A_1)\}\neq\mathbf{R}^1,$$

$$\{y:\text{存在 }x,\text{使}(x,y)\in f(A_2)\}\neq\mathbf{R}^1,$$

取 $x_0\in\{x:\text{存在 }y,(x,y)\in f(A_1)\}^C$，$y_0\in\{y:\text{存在 }x,(x,y)\in f(A_2)\}^C$，于是

$$(x_0,y_0)\overline{\in}\varphi(A_1)\cup\varphi(A_2)=\mathbf{R}^2,$$

推出矛盾．

例 18 设 f 是定义在[0,1]上的实值函数，且存在常数 M，使对于[0,1]中任意有限个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，均有

$$|f(x_1)+\cdots+f(x_n)|\leqslant M.$$

证明：集合 $E=\{x\in[0,1]:f(x)\neq 0\}$ 至多是可列集.

证 对任何 $a>0$，记 $E_a^+=\{x:f(x)>a\}$，因为对任何 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in E_a^+$，有 $a\cdot p\leqslant|f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_p)|\leqslant M$，所以 $p\leqslant M/a$，即 E_a^+ 为有限集. 同样，对 $a<0$，记 $E_a^-=\{x:f(x)<a\}$，类似可证 E_a^- 为有限集. 于是，由 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_{1/n}^+\cup E_{1/n}^-)$ 知，E 至多是可列集.

例 19 可列集的子列的全体所构成的集的势是 $\aleph$.

证 设 A 为可列集，其子列的全体所构成的全体为 S，记 B 为二进制小数全体. 设 $A=\{q_1,q_2,\cdots,q_n,\cdots\}$，作映射 $f:S\to B$，若 f 为双射，则命题得证. $f(C)=0.t_1t_2\cdots,C\in S$.

当 $q_n\in C$ 时，$t_n=1$；当 $q_n\overline{\in}C$ 时，$t_n=0,n=1,2,\cdots$. 则 f 是从 S 到 B 的一个双射，因而 $\overline{\overline{S}}=\overline{\overline{B}}=\aleph$.

例 20 如果 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的势为 $\aleph$，证明：必有一个 A_n 的势为 $\aleph$.

证 因为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的势为 $\aleph$，则一定存在双射 $f:\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\to\mathbf{R}^{\infty}$. 记 $B_n=\varnothing f(A_n)$，于是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n=\mathbf{R}^{\infty}$，$A_n\sim B_n,n=1,2,\cdots$.

对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in\mathbf{R}^{\infty}$，记 $P_nx=x_n$，P_n 是从 $\mathbf{R}^{\infty}$ 到 $\mathbf{R}^1$ 的一个映射. 如果存在某个 n，使 $P_n\cdot B_n=\mathbf{R}^1$，则由 $\aleph\geqslant\overline{\overline{A}}_n=\overline{\overline{B}}_n>\overline{\overline{\mathbf{R}}}^1=\aleph$ 知，$\overline{\overline{A}}_n=\aleph$. 否则，对一切 n 均有 $P_nB_n\subset\mathbf{R}^1$，但 $P_nR_n\neq\mathbf{R}^1$. 对每个 n 取 $a_n\in\mathbf{R}^1\backslash P_nA_n$，记 $a=(a_1,a_2,\cdots)$，则 $a\in\mathbf{R}^{\infty}$. 因为 $P_na=a_n\overline{\in}P_nB_n$，所以 $a\overline{\in}B_n,n=1,2,\cdots$. 这与 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n=\mathbf{R}^{\infty}$ 矛盾. 故必存在某个 n，使 $\overline{\overline{A}}=\aleph$.

例 21 设 $f(x)$ 为 (a,b) 上的实值函数，证明：

$\{x\in(a,b)$：右导数 $f'_+(x)$ 与左导数 $f'_-(x)$ 存在但不相等$\}$ 为可数集.

证 作 $A=\{x\in(a,b):f'_+(x)<f'_-(x)\}$ 与 $B=\{x\in(a,b):f'_+(x)>f'_-(x)\}$，证明 A 与 B 为可数集即可.

先证 A 为可数集. $\forall\ x\in A$,取 $r_x<+\infty$,使得 $f'_+(x)<r_x<f'_-(x)$. 再取有理数 s_x 与 t_x,$a<s_x<t_x<b$,使得以下两式同时成立:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}>r_x,\quad s_x<y<x,$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}<r_x,\quad x<y<t_x.$$

从而 $f(y)-f(x)<r_x(y-x)$,$y\neq x$,$s_x<y<t_x$. 于是,对应 $x\to(r_x,s_x,t_x)$是从 A 到 $\mathbf{Q}^3$ 的一个单射. 因为,$\forall\ x_1,x_2\in A$,若 $r_{x_1}=r_{x_2}$,$s_{x_1}=s_{x_2}$,$t_{x_1}=t_{x_2}$,则 $(s_{x_1},t_{x_1})=(s_{x_2},t_{x_2})$且均含 x_1 及 x_2,这时

$$f(x_1)-f(x_2)<r_{x_1}(x_2-x_1),$$

$$f(x_2)-f(x_1)<r_{x_2}(x_1-x_2),$$

而 $r_{x_1}=r_{x_2}$,推出矛盾. 从而说明 A 与 $\mathbf{Q}^3$ 的一个子集对等,而 $\mathbf{Q}^3$ 的基数是 $\aleph_0$,即 A 为可数集.

类似可证 B 为可数集,于是命题成立.

例22 证明:(a,b)上的(下)凸函数在至多除一可列集外的点上均可微.

证 由(下)凸函数定义知,$\forall\ x_1,x_2\in(a,b)$,有

$$f(x)\leqslant\frac{(x_2-x_1)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)}{x_2-x_1},\quad x_1<x<x_2.$$

可得

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

而对 $x<x'_2<x_2$,有

$$\frac{f(x'_2)-f(x)}{x'_2-x}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

则

$$\lim_{x'_2\to x^+}\frac{f(x'_2)-f(x)}{x'_2-x}=f'_+(x)<+\infty.$$

类似知 $f'_-(x)$也存在,且 $-\infty<f'_-(x)<f'_+(x)<+\infty$. 从而得出:$(a,b)$上的(下)凸函数在至多除一可列集外都是可微的.

第三节　n 维欧几里德空间 $\mathbf{R}^n$

主 要 内 容

1. 一切有序数组 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的全体称为 $\mathbf{R}^n$，其中 $\xi_i\in\mathbf{R}^1$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是实数．定义运算如下．

(1)加法：对于 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n).$$

(2)数乘：对 $\lambda\in\mathbf{R}^1$，$\lambda x=(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\cdots,\lambda\xi_n)\in\mathbf{R}^n$. 在加法与数乘下构成一个向量空间．向量

$$e_i=(\underbrace{0,\cdots,0}_{i-1个},i,0,\cdots,0)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

则 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 组成 $\mathbf{R}^n$ 的基底．$\mathbf{R}^n$ 称为实数域上的 n 维向量空间，$x=(\xi_1,\xi_0,\cdots,\xi_n)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量或点．当每个 ξ_i 为有理数时，x 称为有理点．

2. 对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$，规定

$$|x|=(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)^{1/2},$$

称 $|x|$ 为向量 x 的模或长度．$|x|$ 有以下性质．

(1) $|x|\geqslant 0$，$|x|=0$，当且仅当 $x=(0,\cdots,0)$；

(2)若 $a\in\mathbf{R}^1$，则 $|ax|=|a|\cdot|x|$；

(3) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$；

(4)设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，则

$$(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\cdots+\xi_n\eta_n)^2\leqslant(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)(\eta_1^2+\eta_2^2+\cdots+\eta_n^2).$$

3. 设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，定义

$$d(x,y)=\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right\}^{1/2},$$

称 $d(x,y)$ 为点 x 与点 y 间的距离，有以下性质：

(1) $d(x,y)\geqslant 0$，当且仅当 $x=y$ 时 $d(x,y)=0$；

(2)$d(x,y)=d(y,x)$;

(3)$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

若$x,y\in X$,则称在X中定义了距离d,(X,d)称为距离空间.$(\mathbf{R}^n,d)$是一个距离空间,$d(x,y)=|x-y|$. 距离空间又称度量空间.

4. 设E为$\mathbf{R}^n$的一个点集,规定

$$\operatorname{diam}(E)=\sup\{|x-y|:x,y\in E\},$$

称$\operatorname{diam}(E)$为E的直径. 若$\operatorname{diam}(E)<\infty$,则称$E$为有界集.

E是有界集的充分必要条件是:存在$M>0$,使对一切$x\in E$,都有$|x|<E$.

5. 设$x_k\in\mathbf{R}^n(k=1,2,\cdots)$. 若存在$x\in\mathbf{R}^n$,使得$\lim\limits_{k\to\infty}|x_k-x|=0$,则称$x_k$ $(k=1,2,\cdots)$为$\mathbf{R}^n$中收敛于x的点列,x称为点列的极限点,记做$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$.

对$x_k=(\xi_{k_1},\xi_{k_2},\cdots,\xi_{k_n})$,$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,$x_k$ $(k=1,2,\cdots)$收敛于x的充分必要条件是:对每个i,实数列$\{\xi_{k_i}\}$都收敛于ξ_i. 也可以表示为

$$\lim_{l,m\to\infty}|x_l-x_m|=0 \quad (\{x_k\}\text{是基本列}).$$

6. 设$E\subset\mathbf{R}^n$,$x\in\mathbf{R}^n$. 若存在E中的互异点列$\{x_k\}$,使得$\lim\limits_{k\to\infty}|x_k-x|=0$,则称$x$为$E$的极限点. E的极限点的全体记做E',称为E的导集.

有限集不存在极限点.

若$E\subset\mathbf{R}^n$,则$x\in E'$,当且仅当对任意的$\delta>0$,有$(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E\neq\varnothing$. 这里$B(x,\delta)$是以$x$为中心、以$\delta$为半径的开球,即$\{x'\in\mathbf{R}^n:|x'-x|<\delta\}$.

7. 设$E\subset\mathbf{R}^n$,若E中的点x不是E的极限点,即存在$\delta>0$,使得$(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E=\varnothing$,则称$x$为$E$的孤立点,即$x\in E\setminus E'$.

8. $(E_1\cup E_2)'=E'_1\cup E'_2$.

9. 波尔察诺-维尔斯特拉斯定理:$\mathbf{R}^n$中任一有界无限点集E至少有一个极限点.

疑难解析

怎样理解 n 维欧几里德(简称欧氏)空间中球邻域与矩体邻域的概念?

答 球邻域是微积分中邻域概念的推广. 在实轴上的邻域是以 x_0 为中心、以 δ 为半径的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$;在平面上的邻域是以 (x_0, y_0) 为中心、以 δ 为半径的开圆盘 $U((x_0,y_0),\delta)=\{(x,y): [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}<\delta\}$. n 维欧氏空间的球邻域 $B(x_0,\delta)$ 是点集 $\{x\in\mathbf{R}^n: |x-x_0|<\delta\}$, $x_0\in\mathbf{R}^n$, $\delta>0$, 即是 $\mathbf{R}^n$ 中以 x_0 为中心、以 δ 为半径的开球. 为了需要,引入点集 $\{x: |x-x_0|\leqslant\delta\}$, 称之为闭球.

为了证明问题的需要,引入表述比较简便的矩体邻域,即设 a_i, b_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 均为实数,且 $a_i<b_i$, 这时,称点集 $\{x: (\xi_1,\cdots,\xi_n), a_i<\xi_i<b_i\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开矩体,即直积集 $(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$, 还可以有闭矩体与半开闭矩体.

方法、技巧与典型例题分析

对于一个集合是否为距离空间,需要验证满足距离空间的三个性质. 一般地,性质1和性质2比较容易验证,而性质3的证明就困难一些,要用到我们在数学分析中学过的一些知识,请看以下例题.

例1 证明:在闭区间 $[a,b]$ 上有界的一切函数所构成的集合,若定义数

$$\rho(\varphi,\psi)=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|\varphi(t)-\psi(t)|$$

作为该集的两个元素 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 之间的距离,则集合形成度量空间.

证 前两条性质显然是满足的. 对在 $[a,b]$ 上任意的有界函数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 及任意的 $t\in[a,b]$, 有

$$\begin{aligned}|\varphi(t)-\psi(t)| &\leqslant |\varphi(t)-\chi(t)|+|\chi(t)-\psi(t)| \\ &\leqslant \sup_{a\leqslant t\leqslant b}|\varphi(t)-\chi(t)|+\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|\chi(t)-\psi(t)|\end{aligned}$$

$$=\rho(\varphi,\chi)+\rho(\chi,\psi),$$

从而，数$\rho(\varphi,\chi)+\rho(\chi,\psi)$是函数$|\varphi(t)-\psi(t)|$的上界．而上确界是上界中最小值，故

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant\rho(\varphi,\chi)+\rho(\chi,\psi),$$

即
$$\rho(\varphi,\chi)+\rho(\chi,\psi)\geqslant\rho(\varphi,\psi).$$

于是，三条性质都满足，所以是度量空间．

例 2 证明：对于能使级数$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$收敛的一切无穷数列$x(a_1,a_2,\cdots)$所成之集．若定义$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i|$作为两个数列$x(a_1,a_2,\cdots)$与$y(b_1,b_2,\cdots)$的距离，则集合形成度量空间．

证 首先证明，只要数列各项的模所组成的级数收敛，则对于任意数列$x(a_1,a_2,\cdots)$和$y(b_1,b_2,\cdots)$，距离$\rho(x,y)$都有定义．这是因为$|a_i-b_i|\leqslant|a_i|+|b_i|$，而级数$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$和$\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|$已知收敛，所以级数$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i|$收敛．

对于性质1、性质2，显然满足．因为对任意i，有

$$|a_i-b_i|\leqslant|a_i-c_i|+|c_i-b_i|,$$

故
$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-c_i|+\sum_{i=1}^{\infty}|c_i-b_i|,$$

即
$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),\quad z=(c_1,c_2,\cdots).$$

所以，性质3也满足．集合形成度量空间．

例3 若数列$x(a_1,a_2,\cdots)$各项具有性质：$\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2$收敛，证明：若定义$\rho(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2\right]^{1/2}$为任意序列$x(a_1,a_2,\cdots)$与$y(b_1,b_2,\cdots)$的距离，则由一切$x(a_1,a_2,\cdots)$所构成的集合是度量空间．

证 因为

$$(a_i-b_i)^2 \leqslant a_i^2+2|a_ib_i|+b_i^2 \leqslant a_i^2+\frac{a_i^2+b_i^2}{2}\cdot 2+b_i^2$$

$$=2(a_i^2+b_i^2),$$

所以,当级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i^2$和$\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_i^2$收敛时,级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2$恒收敛.

集合显然满足性质1与性质2. 对性质3,因为在n维欧氏空间中有不等式

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\right]^{1/2} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i-c_i)^2\right]^{1/2}+\left[\sum_{i=1}^{n}(c_i-b_i)^2\right]^{1/2}$$

成立. 令$n\to\infty$,取极限即得

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2\right]^{1/2} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-c_i)^2\right]^{1/2}+\left[\sum_{i=1}^{\infty}(c_i-b_i)^2\right]^{1/2},$$

所以,性质3也满足. 集合是度量空间.

例4 证明:对于在$[a,b]$上一切连续函数构成的集合,若定义$\rho(x,y)=\int_a^b|\varphi(x)-\psi(x)|\mathrm{d}x$为集合中任意两个元素$\varphi$与$\psi$之间的距离,则集合形成度量空间,记做$C[a,b]$.

证 集合显然满足性质1与性质2. 对性质3,因为不等式

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leqslant |\varphi(x)-\chi(x)|+|\chi(x)-\psi(x)|$$

成立,对不等式两边由a到b积分,则有

$$\int_a^b|\varphi(x)-\psi(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b|\varphi(x)-\chi(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|\chi(x)-\psi(x)|\mathrm{d}x,$$

所以,性质3也满足. 集合形成度量空间.

例5 对一切实数构成的集合,若定义$\rho(x,y)=\sin^2(x-y)$为集合中任意两数x与y之间的距离,说明该集合是否为度量空间.

解 不是度量空间. 因为由$\sin^2(x-y)=0$,不能得出$x=y$,即不满足性质1,所以不是度量空间.

例6 对于一切实数构成的集合,若定义$\rho(x,y)=|\arctan(x-y)|$为集合中任意两数x与y之间的距离.说明该集合是否为度量空间.

解　是．满足性质1和性质2是显然的．

因为对任意的$\alpha\geqslant 0$和$\beta\geqslant 0$，函数$f(\alpha)=\arctan\alpha+\arctan\beta-\arctan(\alpha+\beta)$是递增的（由$f'(\alpha)>0$可知）．而$f(0)=0$，则当$\alpha>0$时，$f(\alpha)>0$，所以

$$\arctan\alpha+\arctan\beta\geqslant\arctan(\alpha+\beta),$$

于是
$$\begin{aligned}\rho(x,z)+\rho(z,y)&=|\arctan(x-z)|+|\arctan(z-x)|\\&\geqslant|\arctan[(x-z)+(z-y)]|\\&=|\arctan(x-y)|=\rho(x,y),\end{aligned}$$

即满足性质3．所以集合是度量空间．

例7　平面上一切直线构成一个集合．若定义集合中两直线$l_1: x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0$；$l_2: x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0$的距离为

$$\rho(l_1,l_2)=|p_2-p_1|+|\sin\alpha_2-\alpha_1|,$$

问该集合是否为度量空间．

解　不是．因为，设有直线

$$l_1: x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$
$$l_2: x\cos(\pi-\alpha)+y\sin(\pi-\alpha)-p=0.$$

它们虽然并不重合，但却有$\rho(l_1,l_2)=0$．又直线

$$L_1: x\cos\alpha+y\sin\alpha=0,\quad L_2: x\cos(\pi+\alpha)+y\sin(\pi+\alpha)=0$$

是重合的，但$\rho(L_1,L_2)=2|\sin\alpha|\neq 0$（取$0<\alpha<\pi$时）所以不满足性质1，集合不是度量空间．

例8　已知一平面点集E的所有相异两点间的距离的下确界是正的．证明：集E没有极限点．

证　设$\inf\rho(x,y)=d>0, x,y\in E, x\neq y$.

要证明平面上的任一点都不是极限点，只需证在点a的$\delta=\dfrac{d}{2}$邻域内没有一个以上的属于E的点．用反证法证．

若在点a的$\delta=\dfrac{d}{2}$邻域内有E的两个点：x,y．则因为

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,a)+\rho(a,y)<\frac{d}{2}+\frac{d}{2}=d,$$

与题设$d=\inf\rho(x,y),x,y\in E,x\neq y$矛盾.

导集是所有极限点的集合,所以求导集就是依极限点的定义寻找全部极限点(也可依照数学分析知识,由点列的构造求出极限点). 导集的导集是二级导集,依次可以求出n级导集.

例9 作一个集合,使它的第一级导集非空,而第二级导集是空集.

解 由直线上的点:$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$和0组成的点集$E_1$,有第一级导集$E_1'=\{0\}$(单点集),第二级导集$E_1''=\varnothing$.

例10 作一个集合,使它的第$n-1$级导集非空,而第n级导集是空集.

解 例9是$n=2$时的例子.

对每个形如$\frac{1}{i}$的点(i取自然数),作点列$\left\{\frac{1}{k}+\frac{1}{i}\right\},k=1,2,\cdots$,则点列收敛于点$\frac{1}{i}$. 因此,对一切形如$\left\{\frac{1}{k}+\frac{1}{i}\right\}(k\geqslant1,i\geqslant1)$的点所形成的集合再加点0构成集$E_2$,有$E_2'=E_1$(例9中集),即

$$E_2'=E_1,\quad E_2''=E_1'=\{0\},\quad E_2'''=E_1''=\varnothing.$$

一般地,对$n\geqslant2$,一切由形如$\left\{\frac{1}{i_1}+\frac{1}{i_2}+\cdots+\frac{1}{i_k}\right\}$的点和点0所组成的集合$E_{n-1}$,这里$1\leqslant k<n,i_1,\cdots,i_k$取遍一切自然数$1,2,\cdots$. 知$E_{n-1}'=E_{n-2},\cdots$按归纳法可证$E_{n-1}^{(n-1)}=\{0\},E_{n-1}^{(n)}=\varnothing$.

例11 仅由孤立点所组成的集合是否有极限点?它的导集是否无限集?是否不可数集?

答 可以有极限点,导集可以是无限集,且可以是不可数集. 例如,由一切点$\left(\frac{k}{2^n},\frac{1}{2^n}\right)$,$k$取一切整数,$n$取一切自然数组成的集$E$,其一切极限点组成的导集是整个数轴$ox$,是无限集,不可数集.

例12 作一个集E,使其一切导集$E',E'',\cdots,E^{(n)},\cdots$彼此互异,且这些导集的交$\bigcap_{n=1}^{\infty}E^{(n)}$是空集.

解 如下列方法作出的集E：

在$[0,1]$上作由全部形如$1/n$的点($n=1,2,\cdots$)组成的集E_1；在$[1,2]$上作由全部形如$1+1/n_1+1/n_2$的点($n_1=2,3,\cdots,n_2=2,3,\cdots$)组成的集$E_2$；…；在$[k-1,k]$上作由全部形如$1+1/n_1+1/n_2+\cdots+1/n_k$的点($n_i=k,k+1,\cdots;i=1,2,\cdots,k$)组成的集$E_k$，则$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$满足题设要求.

例 13 作集E，使其一切的导集$E',E'',\cdots,E^{(n)},\cdots$彼此互异，而其交集$\bigcap_{n=1}^{\infty}E^{(n)}$非空.

解 令例 12 中的集合为E_0，即$E_0=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$. 作集$E=E_0\cup[-1,0]$，则$E^{(i)}\neq E^{(j)},i\neq j$，且$\bigcap_{k=1}^{\infty}E^{(k)}=[-1,0]=\varnothing$.

第四节 闭集与开集

主要内容

一、闭集

1. 设$E\subset\mathbf{R}^n$，若$E\supset E'$，则称E为闭集. 记$\overline{E}=E\cup E'$，并称$\overline{E}$为E的闭包.

E为闭集时，$E=\overline{E}$. 规定空集为闭集.

2. 闭集有以下性质：

(1)若F_1,F_2是$\mathbf{R}^n$中的闭集，则并集$F_1\cup F_2$也是闭集. 有限多个闭集的并集也是闭集；

(2)若$\{F_\alpha:\alpha\in I\}$是$\mathbf{R}^n$中的一个闭集族，则交集$F=\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha$也是闭集.

3. 康托尔(Cantor)闭集套定理　若$\{F_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的非空有界闭集列，且满足$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_k\supset\cdots$，则$\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k\neq\varnothing$.

二、开集

1. 设$G\subset\mathbf{R}^n$，若$G^C=\mathbf{R}^n\setminus G$是闭集，则$G$为开集.

$\mathbf{R}^n$是开集，空集$\varnothing$是开集，$\mathbf{R}^n$中开矩体是开集；闭集的补集是开集.

2. 开集具有以下性质：

(1)若$\{G_\alpha:\alpha\in I\}$是$\mathbf{R}^n$中一个开集族，则并集$G=\bigcup\limits_{\alpha\in I}G_\alpha$是开集；

(2)若G_k $(k=1,2,\cdots,m)$是$\mathbf{R}^n$中的开集，则其交集$G=\bigcap\limits_{k=1}^{m}G_k$是开集；

(3)若G是$\mathbf{R}^n$中的非空点集，则G是开集的充分必要条件是：对于G中任一点x，存在$\delta>0$，使得$B(x,\delta)\subset G$.

3. 设$E\subset\mathbf{R}^n$. 若对于$x\in E$，存在$\delta>0$，使得$B(x,\delta)\subset E$，则称x是E的内点；记E的内点全体为E^0，称为E的内核. 对于开集，$E=E^0$.

4. 定理 (1)$\mathbf{R}^1$中的非空开集是可数个互不相交的开区间(包括$(-\infty,\infty)$，$(-\infty,a)$，(b,∞))的并集；(2)$\mathbf{R}^n$中的非空开集G是可列个互不相交的半开闭方体的并集.

5. 设$E\subset\mathbf{R}^n$，Γ是$\mathbf{R}^n$中的一个开集族. 若对任意的$x\in E$，存在$G\in\Gamma$，使得$x\in G$，则称Γ为(E的)一个开覆盖. 设Γ是E的一个开覆盖，若$\Gamma'\subset\Gamma$仍是E的一个开覆盖，则称Γ'为Γ的一个子覆盖.

$\mathbf{R}^n$中点集E的任一开覆盖Γ都含有一个可数子覆盖.

6. 海涅-波雷尔(Heine-Borel)有限子覆盖定理 $\mathbf{R}^n$中有界闭集的任一开覆盖必含有一个有限子覆盖.

7. 设$E\subset\mathbf{R}^n$. 若E的任一开覆盖都包含有限子覆盖，则E是有界闭集.

8. 设$f(x)$是$E\subset\mathbf{R}^n$上的实值函数，$x_0\in E$，如果$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当$x\in E\cap B(x_0,\delta)$时有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称$f$在$x=x_0$处连续，$x_0$称为$f$的一个连续点(在$x_0\overline{\in}E'$、即$x_0$是$E$的孤立点时，

$f(x)$自然在$x=x_0$连续）. 若E中任一点均为f的连续点，则称f在E上连续. 记E上连续函数的全体为$C(E)$.

9. 定理　若F是闭集，则F^C是开集；若G是开集，则G^C是闭集.

10. 设F是$\mathbf{R}^n$中的紧集，$f\in C(F)$，则有

(1)$f(x)$是F上的有界函数，即$f(F)$是$\mathbf{R}^1$中的有界集；

(2)存在$x_0\in F, y_0\in F$，使得

$$f(x_0)=\sup\{f(x):x\in F\},\quad f(y_0)=\inf\{f(x):x\in F\};$$

(3)$f(x)$在F上一致连续. 即$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$，当$x', x''\in F$且$|x'-x''|<\delta$时，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

若$E\subset\mathbf{R}^n$上的连续函数列$\{f_k(x)\}$一致收敛于$f(x)$，则$f(x)$是E上的连续函数.

11. 若$E\subset E'$，则称E为自密集.

E是自密集的充要条件是E不含孤立点.

12. 若$E=E'$，则称E为完备集.

E是完备集的充要条件是E既是闭集又是自密集（即E是不含孤立点的闭集）.

三、波雷尔集

1. 若$E\subset\mathbf{R}^n$是可数个闭集的并集，则称E为F_σ(型)集；若$E\subset\mathbf{R}^n$是可数个开集的交集，则称E为G_δ(型)集.

F_σ的补集是G_δ集；G_δ的补集是F_σ集.

记$\mathbf{R}^n$中全体有理点为$\{r_k\}$，则有理点集$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{r_k\}$为$F_\sigma$集.

2. 设Γ是集合X中一些子集所构成的集合族，且满足下列条件：

(1)$\varnothing\in\Gamma$；

(2)若$A\in\Gamma$，则$A^C\in\Gamma$；

(3)若$A_n\in\Gamma(n=1,2,\cdots)$，则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\in\Gamma$.

则称Γ是一个σ-代数. 成立下列事实：

(1)若 $A_n\in\Gamma(n=1,2,\cdots,m)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{m}A_n\in\Gamma$；

(2)若 $A_n\in\Gamma(n=1,2,\cdots)$，则

$$\bigcap_{n=1}A_n\in\Gamma,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\in\Gamma,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\in\Gamma;$$

(3)若 $A,B\in\Gamma$，则 $A\setminus B\in\Gamma$；

(4)$X\in\Gamma$.

3. 设 Σ 是集合 X 中一些子集所构成的集合族. 对任一包含 Σ 的 σ-代数 Γ'，若 $A\in\Gamma(\Sigma)$，则 $A\in\Gamma'$，则称 $\Gamma(\Sigma)$ 是由 Σ 生成的 σ-代数.

4. 由 $\mathbf{R}^n$ 中一切开集构成的开集族所生成的 σ-代数称为波雷尔 σ-代数，记为 $\mathscr{B}$. $\mathscr{B}$ 中的元素称为波雷尔集.

闭集、开集、F_σ 集与 G_δ 集均为 $\mathbf{R}^n$ 中的波雷尔集，波雷尔集的补集也是波雷尔集. 波雷尔集合列的交、并、上(下)极限集也是波雷尔集.

5. 伯莱(Baire)定理　设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是 F_σ 集，即 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$，$F_k(k=1,2,\cdots)$是闭集. 若每个 F_k 均无内点，则 E 也无内点.

四、康托尔(三分集)

1. 康托尔(三分集)的构成　将区间[0,1]三等分，去掉中间三分之一，记留下部分为 $F_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]=F_{1,1}\cup F_{1,2}$. 再将两部分各自三等分并去掉各自中间部分，记留下部分为 $F_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]=F_{2,1}\cup F_{2,2}\cup F_{2,3}\cup F_{2,4}$. 如此继续，得到集合列 $\{F_n\}$，其中

$$F_n=F_{n,1}\cup F_{n,2}\cup\cdots\cup F_{n,2^n},\quad n=1,2,\cdots.$$

作点集 $C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，则称 C 为康托尔(三分)集.

2. 康托尔集有以下性质：

(1)C 是非空有界闭集；　　(2)C 是完备集($C=C'$)；

(3)C 无内点；　　(4)C 的基数(势)是 $\aleph(=2^{\aleph_0})$.

3. 康托尔函数　设C是$[0,1]$上的康托尔集，其中的点可用三进位小数$x=2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}$，$a_i=0,1;i=1,2,\cdots$来表示.

(1)对于$x\in C$，定义

$$\varphi(x)=\varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}\quad(a_i=0,1;i=1,2,\cdots)$$

是C上的函数. 因为$[0,1]$中点可用二进位小数表示，所以$\varphi(C)=[0,1]$. $\varphi(x)$是C上的单调增函数.

(2)对于$x\in[0,1]$，定义

$$\Phi(x)=\sup\{\varphi(y):y\in C,y\leqslant x\}$$

是$[0,1]$上的单调增加函数. $\Phi(x)$还是$[0,1]$上的连续函数. 在构造康托尔三分集时所去掉的中央三分开区间上，$\Phi(x)$是常数. $\Phi(x)$又称为康托尔函数.

疑难解析

1. 为什么有限多个闭集的并集是闭集，而无限多个闭集的并集不一定是闭集？

答　设$F_1,F_2,\cdots,F_n$均为闭集. 要证$F=\bigcup_{i=1}^{n}F_i$是闭集. 因为对任意$\alpha\in D$，F_α是闭集，故CF_α是开集. 但是

$$\mathscr{C}F=\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}\mathscr{C}F_i,$$

因为每个$\mathscr{C}F_i$是开集，故由开集的并集仍为开集知$\mathscr{C}F=\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{C}F_i$是开集，所以$F=\mathscr{C}(\mathscr{C}F)$是闭集，从而证得$F=\bigcup_{i=1}^{n}F_i$是闭集.

在无限多个闭集时，我们作

$$F_k=\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]\subset\mathbf{R}^1,\quad k=1,2,\cdots,$$

则有$\bigcup_{k=1}F_k=(0,1]$，不是闭集.

2. 为什么有限个开集的交是开集，而无限多个开集的交不一

定是开集？

答 设$G_1,G_2,\cdots,G_m$是$\mathbf{R}^n$中的开集，则G_k^C $(k=1,2,\cdots,m)$是闭集，且$G^C=\bigcup_{k=1}^{m}G_k^C$. 由闭集的性质知，$G^C$是开集，所以$G$是闭集.

在无限多个开集时，我们作$A_n=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$，$n=1,2,\cdots$，有$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{0\}$. 而单点集$\{0\}$不是开集.

3. 为什么康托尔集的基数是$\aleph$？这说明什么？

答 当将$[0,1]$中的实数按三进位小数展开时，康托尔集中点x与三进位小数集的元素$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}$，$a_i=0,2$一一对应，故$C$的基数是$\aleph$.

这一结果说明，不能包含任何区间的康托尔集C，按对等的原则，它的点与整个$\mathbf{R}^1$空间的点一样多.

4. 为什么有的集合既非开集又非闭集？有的集合既是开集又是闭集？

答 我们知道，当集合$E\supset E'$时，即E的所有极限点都属于E时，集合E是闭集. 于是当E中含有E的极限点而又不含全部极限点时，E既非闭集又非开集. 例如$\mathbf{R}^1$上的半开区间$(0,1]$，有$1\in(0,1]$，但$1\overline{\in}(0,1]^0$，故$(0,1]$不是开集；$0\in(0,1]'$，但$0\overline{\in}(0,1]$，故0不是闭集.

而$\varnothing$和$\mathbf{R}^n$既是开集，又是闭集. 因为$\varnothing^C=\mathbf{R}^n$. 当$\mathbf{R}^n$为开集时，$\varnothing$是闭集. 同样，因为$(\mathbf{R}_n)^C=\varnothing$是开集，$\mathbf{R}^n$是闭集.

既非开集又非闭集的集合是大量存在的，如$\mathbf{R}^1$上的半闭区间$(\alpha,\beta]$或$[\beta,\alpha)$都是此类集合. 而既是开集又是闭集的集合，只有空集$\varnothing$和n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$.

方法、技巧与典型例题分析

熟悉开集和闭集的定义、构造与性质，是讨论与证明关于集合

的命题的基础．证明的方法根据具体问题确定．可以由定义直接证明，也可以利用性质推证，反证法也是效果较好的方法．还可以用对等性、充分必要条件来证．

一、闭集

例1 点集A是闭集的充要条件是：点集A中任何一个收敛点列必收敛于A中的一点．

证 **充分性** 设A中任何一个收敛点列必收敛于A中一点，则对于A的任一收敛点$x_0\in A'$，必在集A中存在点列$\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$，$n=1,2,\cdots$，使$x_n\to x_0$．因为$x_0\in A$，所以$A'\subset A$．于是A是闭集．

必要性 设A是一个闭集，$\{x_n\}$是A中一个收敛点列，$x_n\to x_0$．如果有某个n，使$x_n=x_0$，则$x_0\in A$；如果对一切n，$x_n\neq x_0$，但$x_n\to x_0$，则x_0是A的聚点，于是$x_0\in A'\subset A$，因而总有$x_0\in A$．命题得证．

例2 设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}^n$上的连续函数，则对任意的$t\in\mathbf{R}^1$，点集$\{x:f(x)\geqslant t\}$，$\{x:f(x)\leqslant t\}$都是闭集．

证 记$E=\{x:f(x)\geqslant t\}$．若$E'=\varnothing$，则结论显然成立．设$x_0\in E'$，由极限点定义，在E中存在互异点列$\{x_k\}$，使得$x_k\to x_0$．因为$x_k\in E$，$k=1,2,\cdots$，所以有$f(x_k)\leqslant t$．于是，由f的连续性知

$$f(x_0)=\lim_{k\to\infty}f(x_k)\leqslant t.$$

说明$x_0\in E=\{x:f(x)\leqslant t\}$，即$E'\subset E$，$\{x:f(x)\leqslant t\}$是闭集．类似可证$\{x:f(x)\leqslant t\}$是闭集．

例3 证明：任意有限集E是闭集．

证 因为对有限集E，显然有$E'=\varnothing\subset E$，所以E是闭集．

例4 设A是$\mathbf{R}^1$中的点集，A既是开集又是闭集，证明：$A=\varnothing$或$A=\mathbf{R}^1$．

证 这实际就是我们在疑难解析4中所说的情形．用反证法．设$A\neq\varnothing$，$A\neq\mathbf{R}^1$．因为A是开集，则当A的构成区间是$\{(\alpha_n,\beta_n)\}$时，有$A=\bigcup\limits_n(\alpha_n,\beta_n)$．由于$A$不是全直线，故区间的端点集$\{\alpha_n\}$，

$\{\beta_n\}$中至少有一个是有限的，不妨设为α_1，$\alpha_1 \overline{\in} A$. 但因为$(\alpha_1,\beta_1)\subset A$，所以$\alpha_1$是$A$的极限点，于是$\alpha_1\in A'$. 又由于$A$是闭集，$A'\subset A$，这时有$\alpha_1\in A$，引出矛盾. 所以$A=\mathbf{R}^1$.

例 5 证明：实直线$\mathbf{R}^1$中的闭区间$[a,b]$不能表为两个不相交的非空闭集的并.

证 用反证法. 设存在两个非空集合F_1和F_2，有$F_1\cap F_2=\varnothing$，$F_1\cup F_2=[a,b]$. 于是，$\rho(F_1,F_2)=d>0$，且存在$x_1\in F_1$，$x_2\in F_2$，使

$$\rho(x_1,x_2)=\rho(F_1,F_2)=d>0,$$

取$x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，则$x_0\in[a,b]=F_1\cup F_2$，故$x_0\in F_1$或$x_0\in F_2$. 不妨设$x_0\in F_1$，则

$$d=\rho(F_1,F_2)\leqslant\rho(x_0,F_2)\leqslant\rho(x_0,x_2)=d/2,$$

而这是不可能的. 同理，$x_0\in F_2$也是不可能的，故假设不成立.

例 6 证明：实直线$\mathbf{R}^1$不能表为可列个两两不相交的非空闭区间的并.

证 设$[a_1,b_1]$，$[a_2,b_2]$，…，$[a_n,b_n]$，…是任意可列个互不相交的闭区间. 要证$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$不能填满全直线，即

$$\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\right]^{C}\neq\varnothing.$$

(1)令$E=C\left[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\right]$(表示这些闭区间内域的并集，则$E$是非空闭集).

(2)E是实直线去掉可列个互不相交且两两无公共端点的开区间(否则，引出矛盾)而构成的，所以E是没有孤立点的闭集，故E是完备集，其基数为$\aleph$. 但

$$\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\right]^{C}=E-\{a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots\},$$

而$\{a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots\}$是可列集，故$\left[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\right]^{C}$的基数也是$\aleph$，从而知其非空，所以$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\neq\mathbf{R}^1$.

对$\mathbf{R}^n$上的两个点集A和B,$A\subset B$. 如果B中每一点的任一邻域中总含有A中的点,则称A在B中**稠密**. 若A在$\mathbf{R}^n$中稠密,则称A是**稠密集**. 对$\mathbf{R}^n$中的点集A,若点集A和每个非空开集的交在这个开集中都不稠密,则称A是**疏朗集**(或称**无处稠密集**).

例7 证明:任何点集的导集是闭集.

证 设点集E的导集为E'. 设x_0是E'的极限点,则对任何$\delta>0$,必有某个$y\in[N(x_0,\delta)\setminus\{x_0\})\cap A'$,取$\varepsilon=\min\{\delta-\rho(x_0,y),\rho(x_0,y)\}$,则$\varepsilon>0$,且$N(y,\varepsilon)\subset N(x_0,\delta)$,但$x_0\overline{\in}N(y,\varepsilon)$. 又因为$y\in A'$,故一定可以取到某$x\in N(y,\varepsilon)\cap A$,有$x\neq x_0$,且$x\in N(x_0,\delta)\cap A$,从而$[N(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}]\cap A=\varnothing$,即$x_0\in A'$. 既然$A'$包含了自己所有的极限点,则$A'$是一个闭集.

例8 证明:$\mathbf{R}^1$中每个闭集必是可列个开集之交,每个开集可以表示成可列个闭集的并.

证 因为闭集是开集的余集,所以$\mathbf{R}^1$的每个闭集均可表为$(-\infty,+\infty)\setminus\bigcup\limits_n(a_n,b_n)$,其中$\{(a_n,b_n)\}$为至多可列个开区间. 这时

$$
\begin{aligned}
&(-\infty,+\infty)\setminus\bigcup_n(a_n,b_n)\\
&=\bigcap_n[(-\infty,+\infty)\setminus(a_n,b_n)]=\bigcap_n[(-\infty,a_n]\cup[b_n,+\infty)]\\
&=\bigcap_n\bigcap_{k=1}^{\infty}[(-\infty,a_n+1/k)\cup(b_n-1/k,+\infty)].
\end{aligned}
$$

这样,便把闭集表为可列个开集$(-\infty,a_n+1/k)\cup(b_n-1/k,+\infty)$之交.

又设G是开集,则$(-\infty,+\infty)\setminus G$是闭集. 由上面的证明知,存在一列开集$G_n$,使$(-\infty,+\infty)\setminus G=\bigcap\limits_n G_n$,因此$G=(-\infty,+\infty)\setminus\bigcap\limits_n G_n=\bigcup\limits_n[(-\infty,+\infty)\setminus G_n]$. 这样,便把开集$G$表为一列闭集$(-\infty,+\infty)\setminus G_n$的并. 命题证毕.

例9 证明:求闭包的运算有以下性质:

(1)$\overline{\varnothing}=\varnothing$; (2)$\overline{A}\supset A$;

(3)$\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$；　　　　(4)$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证　(1)因为$\varnothing'=\varnothing$,所以$\overline{\varnothing}=\varnothing\cup\varnothing'=\varnothing$.

(2)$A\subset A\cup A'=\overline{A}$.

(3)由闭包定义和例7以及$(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)'=A_1'\cup A_2'\cup\cdots\cup A_n'$,

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{A})}&=\overline{A}\cup(\overline{A})'=A\cup A'\cup(A\cup A')'\\&=A\cup A'\cup(A'\cup(A')')\subset A\cup A'\cup(A'\cup A')\\&=A\cup A'=\overline{A}\subset\overline{(\overline{A})}.\end{aligned}$$

所以$\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$.

(4)利用$(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)'=A_1'\cup A_2'\cup\cdots\cup A_n'$,有

$$\begin{aligned}\overline{(A\cup B)}&=(A\cup B)\cup(A\cup B)'=(A\cup B)\cup(A'\cup B')\\&=(A\cup A')\cup(B\cup B')=\overline{A}\cup\overline{B}.\end{aligned}$$

例10　证明:$\overline{A}$是包含A的最小闭集. 即对任何闭集F,如果$F\supset A$,则$F\supset\overline{A}$.

证　设闭集$F\supset A$,则A的聚点必是F的极限点,从而$A'\subset F'\subset F$. 于是$\overline{A}=A\cup A'\subset F$.

二、开集与开覆盖

例11　$\mathbf{R}^n$与空集$\varnothing$是开集.

解　用定义证. 因为$\mathbf{R}^n$包含它的每一点的邻域,所以$\mathbf{R}^n$中的每一点都是它的内点,故$\mathbf{R}^n$是开集. 而空集$\varnothing$不含任何点,故$\varnothing$不含有不是内点的点,故$\varnothing$是开集.

疑难解析4用余集概念证明$\mathbf{R}^n$和空集$\varnothing$又是闭集.

例12　证明下列命题:

(1)$\mathbf{R}^1$中任意开区间是开集;

(2)$\mathbf{R}^n$中点p的任意邻域$N(p,\delta)$均是开集.

证　(1)设(a,b)是$\mathbf{R}^1$中任一开区间,任取$x\in(a,b)$,则$a<x<b$. 取$\varepsilon_x=\min\{x-a,b-x\}$,则有

$$N(x,\varepsilon_x)=(x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x)\subset(a,b).$$

所以 x 是 (a,b) 内点，由 x 任意性知命题成立.

(2)需要证明对任意 $q\in N(p,\delta)$，存在 $N(q,\varepsilon)$，使 $N(q,\varepsilon)\subset N(p,\delta)$.

设 $p\in\mathbf{R}^n$，$N(p,\delta)=\{e:\rho(p,e)<\delta\}$. 若 $q\in N(p,\delta)$，则 $\rho(p,q)<\delta$，于是 $\varepsilon=\delta-\rho(p,q)>0$.

设有 $t\in N(q,\varepsilon)$，则 $\rho(q,t)<\varepsilon=\delta-\rho(p,q)$. 于是 $\rho(p,t)\leqslant\rho(p,q)+\rho(q,t)<\delta$. 即 $t\in N(p,\delta)$，故 $N(q,\varepsilon)\subset N\{p,\delta)$，从而 q 是 $N(p,\delta)$ 的内点. 由 q 的任意性知，$N(p,\delta)$ 是开集.

例13 证明：闭集关于开集的差集仍是开集；开集关于闭集的差集仍是闭集.

证 设 G 是开集，F 是闭集，因为

$$G\backslash F=G\cap F^{C},\quad F\backslash G=F\cap G^{C},$$

而 F^{C} 是开集，G^{C} 是闭集，故 $G\backslash F$ 是开集，$F\backslash G$ 是闭集.

例14 设 A 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，则对任意集合 $B\subset\mathbf{R}^n$，均有 $A\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$.

证 设 $x\in A\cap\overline{B}$，证 $x\in\overline{A\cap B}$.

因为 $x\in A\cap\overline{B}\Longrightarrow x\in A$ 且 $x\in\overline{B}$，所以 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap B'$.

若 $x\in A\cap B$，则 $x\in A\cap B\subset\overline{A\cap B}$.

若 $x\in A\cap B'$，取 x 的邻域 $N(x,\delta)$，使 $N(x,\varepsilon)\subset A$ 且 $N(x,\varepsilon)\subset N(x,\delta)$. 因为 $x\in B'$，于是在 $N(x,\varepsilon)$ 中必有 B 中的无穷多个点，且在 $N(x,\varepsilon)$ 中必有 $A\cap B$ 的无穷多个点. 而 $N(x,\varepsilon)\subset N(x,\delta)$，所以 $N(x,\delta)$ 中也有 $A\cap B$ 中的无穷多个点. 此即 $x\in(A\cap B)'$，从而 $x\in\overline{A\cap B}$.

综上所述，得 $A\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$.

例15 证明：A 的内点的全体 A^{O} 是包含在 A 中的最大开集，即对任何开集 G，如果 $A\supset G$，则 $A^{O}\supset G$.

证 设 G 是开集，且 $G\subset A$，则因为 G 中每一个点都是 G 的内点，所以也是 A 的内点，故有 $G\subset A^{O}$.

例 16 设$\{G_n\}$是$\mathbf{R}^1$中一列单调增加的开集,$G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$. 如果闭区间$[a,b]\subset G$,证明:必存在$N$,当$n\geqslant N$时,$[a,b]\subset G_n$.

证 设$G_n=\bigcup\limits_i(\alpha_i^{(n)},\beta_i^{(n)})$,其中$(\alpha_i^{(n)},\beta_i^{(n)})$是$G_n$的构成区间,则$[a,b]\subset\bigcup\limits_n\bigcup\limits_i(\alpha_i^{(n)},\beta_i^{(n)})$,即$[a,b]$为一族开区间$\{(\alpha_i^{(n)},\beta_i^{(n)})\}$所覆盖. 由数学分析中的有限覆盖定理,一定可以取到这族开区间中的有限个开区间,设为$\{(\alpha_i^{(n)},\beta_i^{(n)}):(n,i)\in\Lambda_1\}$,其中$\Lambda_1$是一个有限集,使得$\bigcup\limits_{(n,i)\in\Lambda_1}(\alpha_i^{(n)},\beta_i^{(n)})\supset[a,b]$. 取$N=\max\{n:(n,i)\in\Lambda_1\}$,则对一切$(n,i)\in\Lambda_1$,有$(\alpha_i^{(n)},\beta_i^{(n)})\subset G_n\subset G_N$,所以$\bigcup\limits_{(n,i)\in\Lambda_1}(\alpha_i^{(n)},\beta_i^{(n)})\subset G_N$,因此$n\geqslant N$时,$[a,b]\subset G_N\subset G_n$.

例 17 设$\{U_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是直线上一族互不相交的开集. 证明:此族开集至多是可列个.

证 因为对每个$\lambda\in\Lambda$,由于有理数集的稠密性,必能取到有理数$r_\lambda\in U_\lambda$. 又当$\mu\neq\lambda$时,$U_\lambda\cap U_\mu=\varnothing$,故$r_\mu\neq r_\lambda$. 这样$U_\lambda\to r_\lambda$是$\{U_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$到有理数集的一个单射,所以$\{U_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$对等有理数集的一个子集,所以至多是可列集.

若是闭集,情形就不同了. 例如,每个单点集是闭集,不同的单点集必然互不相交,全直线上单点集个数等于实数集的基数$\aleph$.

例 18 设F是$\mathbf{R}^n$中的有界闭集,G是开集且$F\subset G$,则存在$\delta>0$,使得当$|x|<\delta$时,有

$$F+\{x\}\equiv\{y+x:y\in F\}\subset G.$$

证 对于任意的$y\in F$,由于$y\in G$,故必存在$\delta_y>0$,使$B(y,\delta_y)\subset G$. 又$\{B(y,\delta_y/2):y\in F\}$组成$F$的一个开覆盖,故依有限子覆盖定理,存在$y_1,y_2,\cdots,y_m\in F$,使得$F\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m}B(y_k,\delta_{y_k}/2)$. 于是,每一个$y\in F$至少属于某个$B(y_k,\delta_{y_k}/2)$,且$y$与$G^c$中任一点$z$之间的距离为

$$|y-z|\geqslant|z-y_k|-|y_k-y|>\delta_{y_k}-\delta_{y_k}/2=\delta_{y_k}/2.$$

若取 $\delta=\min\{\delta_{y_1}/2,\delta_{y_2}/2,\cdots,\delta_{y_m}/2\}$，则当 $|x|<\delta$ 时有 $y+x\in G$，即 $F+\{x\}\subset G$.

例 19 设 f 是定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数，且对任意实数 r，点集 $\{x:f'(x)=r\}$ 是闭集，证明：f' 是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数.

证 要证 f' 连续，只要证对任何 r，点集 $\{x:f'(x)\geqslant r\}$ 是闭集，即对 x_n 属于集合且 $x_n\to x_0$ 时，x_0 也属于集合. 记 $E_r=\{x:f'(x)\geqslant r\}$. 设 $x_n\in E_r$ 且 $x_n\to x_0$.

如果存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，使 $f'(x_{n_k})=r$，则由题设知 $x_0\in E_r$. 因此，可以设对一切 n，均有 $f'(x_n)>r$. 又若存在某 $x_n=x_0$，则 $x_0\in E_r$，否则，或者可以取子列 $x_{n_k}\to x_0$，使得 $x_{n_k}>x_0$ 对一切 k 成立，或者可以取子列 $x_{n_k}\to x_0$，使得 $x_{n_k}<x_0$ 对一切 k 成立. 不妨设对一切 n，$x_n<x_0$.

如果 $x_0\overline{\in}E_r$，则 $f'(x_0)<r$. 依导数定义，易知存在 $\delta>0$，使得 $|x-x_0|<\delta$ 时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<r$. 这是因为 $x_n\to x_0$，故一定可以取到 N，使当 $n\geqslant N$ 时，$|x_n-x_0|<\delta$，从而 $\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}<r$.

因为 $f'(x_0)>r$，所以存在 x，$x_0>x>x_n$，使得 $\dfrac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}>r$. 由于 $F(t)=\dfrac{f(x_n)-f(t)}{x_n-t}$ 在 $[x,x_0]$ 中是 t 的连续函数，且 $F(x)>r$，$F(x_0)<r$，则由连续函数的介值定理，必存在 $x_n'\in[x,x_0]$，使 $F(x_n')=r$. 又由拉格朗日中值定理，至少有一个 $a_n\in[x_n,x_n']$，使 $f'(a_n)=F(x_n')=r$. 而 $x_n\to x_0$，$x_n\leqslant a_n\leqslant x_0$，所以 $a_n\to x_0$. 由于 $\{x:f'(x)=r\}$ 是闭集，因而 $f'(x_0)=r$，引出矛盾.

例 20 设 $f(x)$ 是定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，对任意的 $t\in\mathbf{R}$，令 $E_t=\{x\in E:f(x)>t\}$，证明：存在 $\mathbf{R}^n$ 中包含 E_t 的开集 G_t，使 $E_t=E\cap G_t$.

证 对任意 $x\in E_t$，有 $f(x)>t$，故依 f 的连续性，必存在 $\delta_x>0$，使得当 $y\in E\cap B(x_0,\delta_x)$ 时，有 $f(y)>t$. 作开集 $G_t=\bigcup\limits_{x\in E_t}B(x,\delta_x)$，则

因为$G_t\supset E_t$，所以$E\cap G_t\supset E_t$. 而对上述任一$B(x,\delta_x)$，都有$E\cap B(x,\delta_x)\subset E_t$. 于是得出$E\cap G_t\subset E_t$，从而得$E_t=E\cap G_t$.

例 21 证明：不能在$[0,1]$上定义如下函数f，它在有理点上连续，而在无理点上不连续.

证 设f是定义在$[0,1]$上的函数，记$E_n=\{x$：对x任一邻域(α,β)，存在$x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$，使$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\frac{1}{n}\}$. 又记$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，依连续性定义直接验证，可知$E$为$f$不连续点的全体.

设$x\in E_n'$，对x的任一邻域(α,β)，由于x是E_n的极限点，故一定存在$\bar{x}\in(\alpha,\beta)\cap E_n$，$(\alpha,\beta)$又是$\bar{x}$的邻域，从而在$(\alpha,\beta)$内至少能取到两点$x_1,x_2$，使$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\frac{1}{n}$，则$x\in E_n$，所以$E_n$是闭集.

如果f的不连续点全体E为$[0,1]$中无理点的全体，则由$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$可知，$[0,1]$中无理数全体能表为可列个闭集的并，但这是不可能的(可用反证法证明).

三、其他点集

例 22 证明：有理数集不是G_δ集.

证 若令有理数集$\mathbf{Q}=\{r_k:k=1,2,\cdots\}$，并设$\mathbf{Q}=\bigcap_{i=1}^{\infty}G_i$，式中$G_i(i=1,2,\cdots)$是开集，则实直线

$$\mathbf{R}^1=(\mathbf{R}^1\backslash\mathbf{Q})\cup\mathbf{Q}=(\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i^C)\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{r_k\})$$

$\{r_k\}$是单点集，每个$\{r_k\}$与G_i^C都是闭集，且由$\overline{G_i}=\mathbf{R}^1$知每个$G_i^C$无内点，则依伯莱定理，$\mathbf{R}^1$是可列个无内点闭集之并，从而知$\mathbf{R}^1$也无内点，引出矛盾. 故$\mathbf{Q}$不是$G_\delta$集.

例 23 设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}^1$上的函数，证明：点集$\{x\in\mathbf{R}^1:\lim\limits_{y\to x}f(y)$存在$\}$是$G_\delta$集.

证 作$w(x)=\lim\limits_{\delta\to 0}w_\delta(x)$，其中

$$w_\delta(x)=\sup_{0<|y-x|<\delta}\{f(y)\}-\inf_{0<|y-x|<\delta}\{f(y)\}.$$

则$\{x\in\mathbf{R}^1:\lim\limits_{y\to x}f(y)$存在$\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x:w(x)<\frac{1}{n}\}$是$G_\delta$集.

例 24 证明不存在满足下列条件的函数$f(x,y)$:

(1)$f(x,y)$在$\mathbf{R}^1$上连续;

(2)偏导数$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$在$\mathbf{R}^2$上处处存在;

(3)$f(x,y)$在$\mathbf{R}^2$上任一点均不可微.

证 不存在满足上述条件的连续函数$f(x,y)$. 作函数列

$$F_n(x,y)=n|f((x+1/n),y)-f(x,y)|,\quad n=1,2,\cdots$$

则$F_n\in C(\mathbf{R}^2)$,且有$\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x,y)=f'_x(x,y)$. 由此可知,$f'_x(x,y)$的连续点集$A$是$\mathbf{R}^2$中稠密的$G_\delta$集. 类似可知$f'_y(x,y)$的连续点集$B$也是$\mathbf{R}^2$中稠密的$G_\delta$集. 因此,在稠密的$G_\delta$集$A\cap B$上,$f'_x(x,y)$与$f'_y(x,y)$均连续. 故$f(x,y)$在$\mathbf{R}^2$上可微,不满足条件(3).

例 25 证明:$\mathbf{R}^1$中可列个稠密开集之交是一个稠密集.

证 设$\{G_n\}$是$\mathbf{R}^1$中的一列稠密开集. 用反证法. 设$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$不是稠密集,则必存在开区间$(\alpha,\beta)$,使$(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n)\cap(\alpha,\beta)=\varnothing$. 取$a<b$,使$[a,b]\subset(\alpha,\beta)$. 于是$(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n)\cap[a,b]=\varnothing$. 这时,$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n\subset[a,b]^C$,故$[a,b]=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}([a,b]\setminus G_n)$. 因为$G_n$是开集,所以,有$\overline{[a,b]\setminus G_n^C}=([a,b]\setminus G_n)^C\supset G_n$. 又因为$G_n$是稠密集,则其余集$[a,b]\setminus G_n$是疏朗集. 这样一来,$[a,b]$就可表示为可列个疏朗集的并,而这是不可能的. 从而知命题成立.

例 26 设E是直线上的完备集,$a\in E,b\in E$且$a\neq b$,证明:$[a,b]\cap E$也是直线上的完备集.

证 显然有$([a,b]\cap E)'\subset E'\cap[a,b]=E\cap[a,b]$. 另一方面$x\in E\cap[a,b]=E'\cap[a,b]$,故取$x_n\in E,x_n\neq x$ $(n=1,2,\cdots)$,使$x_n\to x$. 则当n充分大时,$x_n\in(a,b)$,所以对充分大的n,总有$x_n\in E\cap$

(a,b). 这说明 $x\in(E\cap(a,b))'=(E\cap[a,b])'$. 综上即知 $E\cap[a,b]=(E\cap[a,b])'$.

例 27 证明:直线上有限个或可列个稠密的 G_δ 集的交仍是稠密的 G_δ 集.

证 因为有限个或可列个稠密的 G_δ 集的交一定可以表示为有限个或可列个稠密开集的交,则由例 25 知,交集仍然是稠密的 G_δ 集.

例 28 证明:A 是疏朗集的充要条件为 $\overline{A}$ 的余集是稠密集.

证 **必要性** 设 A 是疏朗集,则对 A 中任何点 x 的邻域 $N(x,\delta)$,存在 $N(y,\varepsilon)\subset N(x,\delta)$,且 $N(y,\varepsilon)\cap A=\varnothing$. 因为 $N(y,\varepsilon)$ 是开集,所以邻域中的点不会是 A 的聚点,即有 $N(y,\varepsilon)\cap A'=\varnothing$,从而 $N(y,\varepsilon)\cap\overline{A}=\varnothing$. 这样,$N(y,\varepsilon)\subset\overline{A}^{C}$,知 $N(x,\varepsilon)\cap\overline{A}^{C}\neq\varnothing$,故 $\overline{A}^{C}$ 是稠密集.

充分性 若 $\overline{A}^{C}$ 是稠密集,则任何点 x 的任一邻域 $N(x,\delta)$ 与 $\overline{A}^{C}$ 的交非空,即存在 $y\in N(x,\delta)\cap\overline{A}^{C}$,但是 $N(x,\delta)$ 是开集,故必存在 $\varepsilon>0$,使 $N(y,\varepsilon)\subset N(x,\delta)\cap\overline{A}^{C}$. 这样,$N(y,\varepsilon)\subset N(x,\delta)$,且 $N(y,\varepsilon)\cap A\subset N(y,\varepsilon)\cap\overline{A}=\varnothing$,从而知 A 为疏朗集.

例 29 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的实函数,f 映开集为开集,问 f 是否连续?问连续映射是否映开集为开集?

解 映开集为开集的实函数不一定连续. 如在每个区间 $[n,n+1]$ $(n=0,\pm1,\cdots)$ 上作康托尔三分集 P_n,令

$$G_n=[n,n+1]-P_n,\quad P=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}P_n,G=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}G_n,$$

则 G 为开集. 设 G 的构成区间为 (a_k,b_k),$k=1,2,\cdots$,在 $\mathbf{R}^1$ 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\tan\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{b_k-x}{b_k-a_k}\right)\pi, & x\in(a_k,b_k),k=1,2,\cdots,\\ 0, & x\in P.\end{cases}$$

则 f 在 P 的一切点上不连续. 但对 $\mathbf{R}^1$ 上的任一开集 $E=\bigcup\limits_i(\alpha_i,\beta_i)$,

由于P不含任何区间，故不可能有$(\alpha_i,\beta_i)\subset P$，只可能是(1)$E\subset G$；(2)$E$的某些构成区间既含有$G$的点又含有$P$的点.

当$E\subset G$时，对任何E的构成区间(α_i,β_i)，必有$(\alpha_i,\beta_i)\subset(a_k,b_k)$.依函数$f$的定义，$f$映$(\alpha_i,\beta_i)$为$\left[\tan\left(\frac{1}{2}-\frac{b_k-a_i}{b_k-a_k}\right)\pi,\tan\left(\frac{1}{2}-\frac{b_k-\beta_1}{b_k-a_k}\right)\pi\right]$. 因为可列个开区间之并为开集，故知不连续的$f$也能映开集为开集.

当E的构成区间(α_i,β_i)既含G的点又含P的点时，由康托尔集的构造知，(α_i,β_i)必含G的构成区间，所以f映开集E为开集$\mathbf{R}^1$.

连续映射不一定映开集为开集. 例如$f(x)=\sin x$在$\mathbf{R}^1$上连续，但它将开集$(0,4\pi)$映为闭集$[-1,1]$.

例30 设E是由康托尔集的补集的构成区间的中点所构成的集合，求E'.

解 设康托尔集为P_0，其补集为G_0.

若$x\in G_0\Longrightarrow x$属于$G_0$的某构成区间$(\alpha_i,\beta_i)$，由于在$x$的邻域$(\alpha_i,\beta_i)$中，只有一点$\frac{1}{2}(\alpha_i+\beta_i)\in E$，知$x$不可能是$E$的聚点.

若$x\in P_0$，则由康托尔集的构造知，x的任一邻域$N(x,\varepsilon)$必含有G_0的某构成区间(α_i,β_i)，于是必有E的点$\frac{1}{2}(\alpha_i+\beta_i)\in N(x,\varepsilon)$，故$x$为$E$的聚点.

综上所述，得$E'=P_0$.

例31 设C为$[0,1]$中的康托尔集，证明：

$$C+C=\{x+y:x\in C,y\in C\}=[0,2].$$

证 首先，$C+C\subset[0,2]$. 其次，令$F_n\times F_n=B_n$ $(n=1,2,\cdots)$，并记$B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n(=C\times C)$.

对$x_0\in[0,2]$，作平面上过点$(x,0)$且与x轴交角为135°的直线，并记此直线与B_1之交集为D_1.

令$D_2=D_1\cap B_2,\cdots,D_n=D_{n-1}\cap B_n,\cdots$. 又设$\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n=P_0(x,y)$，则$x_0=x+y\in C+C$. 由$x_0$的任意性知，命题成立.

例32 点集$E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:x^2+y^2<1\}$是平面上的开圆，则$E$能表示为可列个互不相交的闭圆的并集吗?

解 不能. 用反证法. 设$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，而$\{F_n\}$是互不相交的闭圆，显然，圆周上必有点$A,B$. 于是问题归结为：开区间$(A,B)$不能表为可数个互不相交的闭集的并集. 但由定理知，$\mathbf{R}^1$中的非空开集是可数个互不相交的开区间的并集，且表示法是惟一的. 故E不能表为可列个互不相交的闭圆的并集.

例33 设$G\subset\mathbf{R}^n$为开集，$f:G\to\mathbf{R}$为实函数，证明：f的连续点集为G_δ集.

证 由f在$x^{(0)}\in G$连续的充要条件知f在点$x^{(0)}$处的振幅$\omega(x^{(0)})=\lim\limits_{\delta\to0^+}\{|f(x')-f(x'')|\}=0(x',x''\in B_E(x^{(0)},\delta))$，故$f$的连续点集可表示为

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x\in G|\omega(x)<1/k\},$$

而$\{x\in G|\omega(x)<1/k\}$为$(\mathbf{R}^n,\tau)$中的开集，因此，f的连续点集G_δ集.

例34 设$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$为连续函数，则$f$的可导点集为$F_{\sigma\delta}$集(可数个$F_\sigma$集的交集).

证 由德・摩根公式知，f的可导点集为$F_{\sigma\delta}$集的充要条件是f的不可导点集为$G_{\delta\sigma}$集(可数个G_δ集的并集).

应用上、下导数的概念，得f的不可导集可表为A,B,C的并，而

$$\begin{aligned}A&=\left\{a\left|\varliminf_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\varlimsup_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right.\right\}\\&=\bigcup_{r,R\in\mathbf{Q}}\left\{a\left|\varliminf_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant r<R\leqslant\varlimsup_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right.\right\}\end{aligned}$$

$$=\bigcup_{\substack{r,R\in\mathbf{Q}\\ r<R}}\left\{a\left|\underline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant r\right.\right\}\cap\left\{a\left|\overline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant R\right.\right\},$$

$$B=\left\{a\left|\overline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty\right.\right\}=\bigcap_{r\in\mathbf{Q}}\left\{a\left|\overline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant r\right.\right\},$$

$$C=\left\{a\left|\underline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty\right.\right\}=\bigcap_{r\in\mathbf{Q}}\left\{a\left|\underline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant r\right.\right\}.$$

故只需证点集$\left\{a\left|\overline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant t\right.\right\}$与$\left\{a\left|\underline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant t\right.\right\}$是$G_\delta$集. 因为$\forall\ t\in\mathbf{R}$,

$$\left\{a\left|\overline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant t\right.\right\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}G_{n,k}$$

$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{a\mid\text{存在满足 }0<|x-a|<1/n\text{ 的 }x\text{,使}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>t-\frac{1}{k}\}.$$

所以是G_δ集(也可以由$\forall\ n,k\in\mathbf{N}$时$f$的连续性知$G_{n,k}$为开集得出),同理可证$\left\{a\left|\underline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant t\right.\right\}$也为$G_\delta$集. 从而得$f$的不可导点集为$G_{\delta\sigma}$集,即$f$的可导点集为$F_{\sigma\delta}$集.

例 35 设$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$为连续函数,$i\in\mathbf{N}$,且

$$\lim_{i\to\infty}f_i(x)=f(x),\quad\forall\ x\in\mathbf{R}^n.$$

证明:(1)若$G\subset\mathbf{R}$为开集,则$f^{-1}(G)$为F_σ集;

(2)f的连续点集在$\mathbf{R}^n$中为稠密的G_δ集($\Leftrightarrow f$的不连续点集$D(f)$在$\mathbf{R}^n$中为无内点的F_σ集).

证 (1)因为$\mathbf{R}$中的开集是可数个构成区间的并,所以可设G为开区间(a,b),由于$\{x\mid f_i(x)\geqslant a+\varepsilon\}$是$(\mathbf{R}^n,\tau)$中的闭集,于是

$$\{x\mid f(x)>a\}=\bigcup_{\varepsilon\in\mathbf{Q}^+}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}\{x\mid f_i(x)\geqslant a+\varepsilon\}$$

为F_σ集. 同理可证$\{x\mid f(x)<b\}$也为F_σ集. 它们的交集

$$f^{-1}((a,b))=\{x\mid a<f(x)<b\}=\{x\mid f(x)>a\}\cap\{x\mid f(x)<b\}$$

也为F_σ集.

(2)$a\in D(f)\Longleftrightarrow\exists\ p,q\in\mathbf{Q}$,使

$$p<f(a)<q(\Longleftrightarrow a\in f^{-1}((p,q))\Longleftrightarrow a\overline{\in}f^{-1}(\mathbf{R}-(p,q))),$$

且存在点列$\{a_i\}$,使

$$\lim_{i\to+\infty}a_i=a,\quad f(a_i)\overline{\in}(p,q),\quad i=1,2,\cdots$$

$$(\lim_{i\to+\infty}a_i=a,a_i\overline{\in}f^{-1}((p,q))\Longleftrightarrow\lim_{i\to+\infty}a_i=a,a_i\in f^{-1}(\mathbf{R}-(p,q)))$$

$$\Longleftrightarrow a\in\overline{f^{-1}(\mathbf{R}-(p,q))}-f^{-1}(\mathbf{R}-(p,q)).$$

所以 $$D(f)=\bigcup_{\substack{p,q\in\mathbf{Q}\\p<q}}[\overline{f^{-1}(\mathbf{R}-(p,q))}-f^{-1}(\mathbf{R}-(p,q))].$$

由(1)与德·摩根公式可知,$f^{-1}(\mathbf{R}-(p,q))$为G_δ集,再依德·摩根公式推知,$\overline{f^{-1}(\mathbf{R}-(p,q))}-f^{-1}(\mathbf{R}-(p,q))$为$F_\sigma$集. 易知其无内点,所以$D(f)$也是$F_\sigma$集,而且它是至多可数个无内点的闭集的并. 依据伯莱定理,$D(f)$也无内点.

第五节 点集间的距离

主要内容

1. 设$x\in\mathbf{R}^n$,E是$\mathbf{R}^n$中的非空点集,则称$d(x,E)=\inf\{|x-y|:y\in E\}$为点$x$到$E$的距离. 若$E_1,E_2$是$\mathbf{R}^n$中的非空点集,则称$d(E_1,E_2)=\inf\{|x-y|:x\in E_1,y\in E_2\}$为$E_1$与$E_2$之间的距离,也定义为

$$\inf\{d(x,E_2):x\in E_1\},\quad 或\quad \inf\{d(E_1,y):y\in E_2\}.$$

2. 若$F\subset\mathbf{R}^n$是非空闭集,且$x_0\in\mathbf{R}^n$,则存在$y_0\in F$,使$|x_0-y_0|=d(x_0,F)$.

3. 若E是$\mathbf{R}^n$中非空点集,则$d(x,E)$作为x的函数在$\mathbf{R}^n$上是一致连续的.

若F_1,F_2是$\mathbf{R}^n$中的两个非空闭集且至少有一个是有界的,则存在$x_1\in F_1,x_2\in F_2$,使得$|x_1-x_2|=d(F_1,F_2)$.(也称为距离可达定理)

4. 连续函数延拓定理　若F是$\mathbf{R}^n$中的闭集，$f(x)$是定义在F上的连续函数且$|f(x)|\leqslant M(x\in F)$，则存在$\mathbf{R}^n$上连续函数$g(x)$满足

$$|g(x)|\leqslant M,\quad g(x)=f(x),\quad x\in F.$$

5. 隔离性定理　设A,B是$\mathbf{R}^n$中两个有界闭集，且$A\cap B=\varnothing$，证明：必存在开集G_1,G_2，使$F_1\subset G_1,F_2\subset G_2$且$G_1\cap G_2=\varnothing$.

疑 难 解 析

1. 怎样理解点与点集、点集与点集间距离的概念？

答　可以这样理解：

若x_0为一点，E为一点集，则对任意$y\in E$，恒有$d(x_0,y)\geqslant d(x_0,E)$；对任意$p\in A,q\in B$，恒有$d(p,q)\geqslant d(A,B)$. 点与点集、点集与点集间距离都是非负的，即$d(A,B)\geqslant 0,d(x_0,E)\geqslant 0$.

点x_0与点集E之间距离，可视做单点集$\{x\}$与点集E之间的距离，$d(\{x_0\},E)=d\{x_0,E\}$.

若$x_0\in E$，则$d(x_0,E)=0$.

若$A\cap B\neq\varnothing$，则$d(A,B)=0$. 但若$d(x_0,E)=0$或$d(A,B)=0$，不一定有$x_0\in E$或$A\cap B\neq\varnothing$. 例如，若$A=(0,1),B=(1,3)$，则$d(A,B)=0$，而$A\cap B=\varnothing$.

2. 距离可达定理的条件可否改变？

答　此定理在上节例20中已被证明.

若A,B不是有界集，则定理不再成立. 如$A=\mathbf{N},B=\{n+1/(2n)\}$，显然$A'=B'=\varnothing$，所以$A,B$是闭集，且均无界. 对任意$n\in A,n+1/(2n)\in B$，有$d(n,n+1/(2n))=1/(2n)$. 因为$d(n,n+1/(2n))=1/(2n)\xrightarrow{n\to\infty}0$，故$d(A,B)=0$，但对任何$x\in A,y\in B$均有$d(x,y)>0$.

定理中，A,B均为闭集的条件也不能减弱. 如$A=[1,2),B=[3,5]$，则A不是闭集且$d(A,B)=1$. 但对任意$x\in A,y\in B$均有$d(x,y)>1$，所以在A和B中不存在符合要求的点.

3. 隔离性定理的条件能否放宽？

答 定理条件可放宽到不要求两集合有界，但均为闭集的条件是必要的，不可改变. 如对$A=[2,3)$，$B=[3,5]$，定理显然不成立.

单点集是闭集，所以对$p,q\in \mathbf{R}^n$，且$p\neq q$，依定理可知，必存在集G_1,G_2，使$p\in G_1$，$q\in G_2$，且$G_1\cap G_2=\varnothing$.

方法、技巧与典型例题分析

讨论与求证点与点集、点集与点集间距离时，关键是要选取恰当的点或子集，使过程简单明了.

例 1 设F_1,F_2为两非空有界闭集，且$F_1\cap F_2=\varnothing$，则$d(F_1,F_2)>0$.

证 用反证法. 若$d(F_1,F_2)=0$，依距离可达定理，必存在$p_0\in F_1$，$q_0\in F_2$，使$d(p_0,q_0)=d(F_1,F_2)=0$. 从而由距离定义知$p_0=q_0$，即$p_0=q_0$是F_1与F_2的公共点，与$F_1\cap F_2=\varnothing$矛盾.

例 2 设A为非空点集，$b>0$，$B=\{x:d(x,A)<b\}$，则$A\subset B$，且B为开集.

证 对任意$x\in A$有$d(x,A)=0<d$，故$x\in B$，于是$A\subset B$.

又设$x_0\in B$，则$d(x_0,A)<d$，于是存在$\varepsilon>0$，使$d(x_0,A)+\varepsilon<d$. 因为$d(x_0,A)=\inf\limits_{x\in A}\{d(x_0,x)\}$，所以由下确界定义知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ x_1\in A$，使得$d(x_0,x_1)<d(x_0,A)+\varepsilon<d$. 令$\delta_{x_0}=d-d(x_0,x_1)>0$，即得$x_0$的邻域$N(x_0,\delta_{x_0})\subset B$.

事实上，任取$y\in N(x_0,\delta_{x_0})$，有$d(x_0,y)<\delta_{x_0}$，又由$d(x_0,x_1)=d-\delta_{x_0}$，故

$$d(q,x_1)\leqslant d(q,x_0)+d(x_0,x_1)<\delta_{x_0}+d-\delta_{x_0}=d.$$

因为$x_1\in A$，所以$d(q,A)\leqslant d(q,x_1)<d$，从而$q\in B$. 即$N(x_0,\delta_{x_0})\subset B$. 故$x_0$是$B$的内点，于是知$B$是开集.

例 3 证明：在$\mathbf{R}^n$中每个闭集可以表示为可列个开集之交，每个开集可以表示为可列个闭集之并.

证 $\mathbf{R}^1$ 的情形在上节例8中已得到证明．为证明$\mathbf{R}^n$ 的情形，先证明一个有用的结论：对任意集合 $A\subset\mathbf{R}^n$，$d>0$，点集 $G=\{a,d(a,A)<d\}$必为开集．

$\forall\ x\in G$，有$d(x,A)<d$．令$h=d-d(x,A)$，则$N(x,\frac{h}{2})\subset G$，故$x$ 是G 的内点，于是G 为开集，且$G\supset A$．

设F 为$\mathbf{R}^n$ 的一个闭集．令$G_n=\{a:d(a,F)<1/n\}$，$n=1,2,\cdots$．由前面结论知，G_n 为开集，且$G_n\supset F$．又因为$\forall\ x\in F$，有$d(x,F)=0<1/n$，$n=1,2,\cdots$，所以$x\in G_n$，$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$．反过来，$\forall\ x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，有$d(x,F)<\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$．令$n\to\infty$，则$d(x,F)=0$，因$F$ 为闭集，故$x\in F$．综上所证，知$F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$．

设 G 为开集，则G^{C} 为闭集，由上面所证知$G^{C}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$（$G_n$ 为开集）．于是，$G=(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n)^{C}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(G_n)^{C}$（$G_n^{C}$ 为闭集）．

例4 设F_1,F_2 是$\mathbf{R}^n$ 中的闭集，且$F_1\cap F_2=\varnothing$，证明：存在开集G_1,G_2，使$G_1\cap G_2=\varnothing$，而$G_1\supset F_1$，$G_2\supset F_2$．（又称为隔离性定理）

证 1 由题设 F_1,F_2 是闭集，$F_1\cap F_2=\varnothing$，则对 $x\in F_1$，有$d(x,F_2)>0$；对 $y\in F_2$，有 $d(y,F_1)>0$．作邻域$B(x,\delta_x)$和$B(y,\delta_y)$，其中$\delta_x=\frac{1}{2}d(x,F_2)$，$\delta_y=\frac{1}{2}d(y,F_1)$．再令

$$G_1=\bigcup_{x\in F_1}B(x,\delta_x),\quad G_2=\bigcup_{y\in F_2}B(y,\delta_y).$$

显然，G_1,G_2 都是开集，且$G_1\supset F_1$，$G_2\supset F_2$．

设$G_1\cap G_2\neq\varnothing$，则有$a\in G_1\cap G_2$，即$a\in G_1$ 且$a\in G_2$，于是必存在$x_0\in F_1$，$y_0\in F_2$，使得$a\in B(x_0,\delta_{x_0})$且$a\in B(y_0,\delta_{y_0})$．若$\delta_{x_0}>\delta_{y_0}$，则有

$$\begin{aligned}d(x_0,F_2)&\leqslant d(x_0,y_0)\leqslant d(x_0,a)+d(a,y_0)\leqslant\delta_{x_0}+\delta_{y_0}\\&\leqslant 2\delta_{x_0}=d(x_0,F_2),\end{aligned}$$

这是不可能的. 故$G_1\cap G_2=\varnothing$.

证 2 作$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}$的连续函数

$$f(x)=\frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}.$$

则$f(F_1)=0,f(F_2)=1$,即$F_1=f^{-1}(0),F_2=f^{-1}(1)$. 令

$$G_1=f^{-1}\left((-\infty,\frac{1}{2})\right),\quad G_2=f^{-1}\left((\frac{1}{2},+\infty)\right).$$

由连续函数的性质,开集的原像集是开集,故G_1,G_2均为开集,且$G_1\cap G_2=\varnothing,G_1\supset F_1,G_2\supset F_2$.

例 5 设A,B为非空闭集且$A\cap B=\varnothing$,证明:在$\mathbf{R}^1$上连续函数有$f(x)$满足:$0\leqslant f(x)\leqslant 1$,且当$x\in A$时,$f(x)=0$;当$x\in B$时,$f(x)=1$.

证 以$d(x,A)$记点x到集合A的距离,则$d(x,A)\geqslant 0$,其中等号当且仅当$x\in A$时成立. 作函数

$$f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

先证$d(x,A)+d(x,B)>0$,则$f(x)$有意义. 因为,若$d(x,A)+d(x,B)=0$,则$d(x,A)=d(x,B)=0$,于是$x\in A\cap B$,与假设$A\cap B=\varnothing$矛盾.

再证$d(x,A)$是x的连续函数. 因为,对任意x_0,有$d(x_0,A)\leqslant|x_0-x|+d(x,A)$和$d(x,A)\leqslant|x-x_0|+d(x_0,A)$,所以

$$|d(x,A)-d(x_0,A)|\leqslant|x-x_0|,$$

即知$d(x,A)$是x的连续函数.

类似可证$d(x,B)$也是x的连续函数.

因为$f(x)$是连续函数$d(x,A)$与$d(x,B)$的复合函数(分母不为零),所以$f(x)$是x的连续函数. 又当$x\in A$时,$d(x,A)=0$,故$f(x)=0$;当$x\in B$时,$d(x,B)=0$,故$f(x)=1$.

例 6 证明:有理系数的一切多项式所构成的集合在$C[0,1]$空间内处处稠密.

证 设 $\varepsilon>0$ 是任一正数，对任意 $\varphi(x)\in C$，可以找到多项式 $P(x)$，使 $d(\varphi,P)<\varepsilon/2$（维尔斯特拉斯第一定理）．设 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，用满足 $|a_i-b_i|<\dfrac{\varepsilon}{2(n+1)}$ 的有理数 b_i 代替 a_i，作以有理数 b_i 为系数的多项式

$$Q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n,$$

则
$$\begin{aligned}|P(x)-Q(x)|&=|(a_0-b_0)+(a_1-b_1)+\cdots+(a_n-b_n)|\\&\leqslant|a_0-b_0|+|a_1-b_1||x|+\cdots+|a_n-b_n||x^n|\\&\leqslant|a_0-b_0|+|a_1-b_1|+\cdots+|a_n-b_n|\\&<\frac{\varepsilon}{2(n+1)}(n+1)=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

所以 $d(P,Q)<\varepsilon/2$，但是

$$d(\varphi,Q)\leqslant d(\varphi,P)+d(P,Q)=\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

故有理系数多项式集在 $C[0,1]$ 中稠密．

例 7 设点集 A_1,A_2 均非空，且 $d(A_1,A_2)=\varepsilon>0$，令 $B_1=\{p:d(p,A_1)<\varepsilon/2\}$，$B_2=\{p:d(p,A_2)<\varepsilon/2\}$，证明：$B_1\cap B_2=\varnothing$．

证 用反证法．设 $B_1\cap B_2\neq\varnothing$，则存在 $q\in B_1\cap B_2$．从而知 $d(q,A_1)<\varepsilon/2$，$d(q,A_2)<\varepsilon/2$．则依下确界定义，必有 $p_1\in A_1$，$p_2\in A_2$，使得 $d(q,p_1)<\varepsilon/2$，$d(q,p_2)<\varepsilon/2$，所以有

$$d(p_1,p_2)\leqslant d(p_1,q)+d(q,p_2)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

于是有 $d(A_1,A_2)\leqslant d(p_1,p_2)<d$，与题设矛盾．故必 $B_1\cap B_2=\varnothing$．

第二章　勒贝格测度

第一节　点集的勒贝格外测度

主 要 内 容

1. 设$E\subset\mathbf{R}^n$. 若$\{I_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的可数个开矩体，且$E\subset\bigcup_{k\geq 1}I_k$，则称$\{I_k\}$是$E$的一个$L$-覆盖(显然，这样的覆盖有很多，且每一个$L$-覆盖$\{I_k\}$确定一个非负广义实值$\sum_{k\geq 1}|I_k|$(可以是$\infty$，$|I_k|$表示$I_k$的体积))，并称

$$m^*(E)=\inf\left\{\sum_{k\geq 1}|I_k|:\{I_k\}为E的L\text{-}覆盖\right\}$$

为点集E的勒贝格(Lebesgue)外测度.

若E的任意的L-覆盖$\{I_k\}$均有$\sum_{k\geq 1}|I_k|=\infty$，则$m^*(E)=\infty$，否则$m^*(E)<\infty$.

$\mathbf{R}^n$中单点集的外测度为零. $\mathbf{R}^n$中的点集

$$\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{i-1},t_0,\xi_{i+1},\cdots,\xi_n):a_j\leqslant\xi_j\leqslant b_j,j\neq i\}$$

(n-1 维超平面块)的外测度也为零.

2. $\mathbf{R}^n$中点集的外测度的性质：

(1)非负性　$m^*(E)\geqslant 0$，　$m^*(\varnothing)=0$；

(2)单调性　若$E_1\subset E_2$，则$m^*(E_1)\leqslant m^*(E_2)$；

(3)次可加性　$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)$.

若$E\subset\mathbf{R}^n$为可数点集，则$m^*(E)=0$.

3. 设$E\subset\mathbf{R}^n$，$\delta>0$. 令

$$m_\delta^*(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|:\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\supset E,\text{每个开矩体 }I_k\text{ 的边长}<\delta\right\},$$

则
$$m_\delta^*(E)=m^*(E).$$

4. 设E_1,E_2是$\mathbf{R}^n$中的两个点集，若$d(E_1,E_2)>0$，则

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2).$$

5. 平移不变性　设$E\subset\mathbf{R}^n$，$x_0\in\mathbf{R}^n$. 令

$$E+\{x_0\}\equiv\{x+x_0,x\in E\},$$

则
$$m^*(E+\{x_0\})=m^*(E).$$

疑难解析

怎样理解点集的外测度？

答　$\mathbf{R}^n$中的开区间即为点集

$$E=\{x:x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),a_i<x_i<b_i,i=1,\cdots,n\},$$

式中a_i,b_i均为常数，且$a_i\leqslant b_i$. 当有某个$a_i=b_i$出现，则E为空集. 当条件$a_i<x_i<b_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$中某个不等号改为等号时，称E为区间. 对上述区间E(包括某些不等号改等号情形)规定

$$m(E)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i),$$

称为E的测度. $n=1$时，$m(E)$是E的长度；$n=2$时，$m(E)$是E的面积；$n=3$时，$m(E)$是E的体积. 为了确定$m(E)$，我们需要利用上、下确界的概念定义点集的外、内测度. 当一个点集的外测度等于内测度时，其共同值就是点集的测度.

勒贝格外测度是勒贝格定义的一种外测度. 设E是$\mathbf{R}^n$中的任一点集，对于任意一列覆盖E的开区间$\{I_k\}$(构成一个开矩体)，$E\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k$，其测度总和$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k|\left(\text{或}\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(I_k)\right)$，这些和数组成一个非负的实数集合，其下确界称为$E$的勒贝格外测度，简称外测度. 记做

$$m^*(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}|I_k|:\{I_k\}为 E 的 L\text{-}覆盖\right\}.$$

方法、技巧与典型例题分析

加深对定义的理解，学会用外测度性质求简单点集的外测度.

例1 在$\mathbf{R}^1$中，设E是$[0,1]$中的有理数全体，证明：$m^*(E)=0$.

证 依定义，$m^*(E)\geqslant 0$. $\forall\ \varepsilon>0$，记$E=(r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots)$，令$I_k=(r_k-\varepsilon/2^{k+1},r_k+\varepsilon/2^{k+1})$，则$m(I_k)=\varepsilon/2^k$. 由于$E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$，所以$\sum_{k=1}^{\infty}m(I_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon/2^k=\varepsilon$. 依外测度定义又有$m^*(E)\leqslant\varepsilon$. 故综合可知$m^*(E)=0$. 并由此得，对可列点集$E$，有$m^*(E)=0$.

例2 设I是$\mathbf{R}^n$中的开矩体，$\bar{I}$是闭矩体，证明：$m^*(\bar{I})=|I|$.

证 $\forall\ \varepsilon>0$，作一开矩体J，使得$J\supset\bar{I}$且$|J|<|I|+\varepsilon$，于是有$m^*|I|\leqslant|J|\leqslant|I|+\varepsilon$. 由$\varepsilon$的任意性知$m^*|\bar{I}|\leqslant|I|$. 设$\{I_k\}$是$\bar{I}$的任意的$L$-覆盖，因为$\bar{I}$是有界闭集，所以存在$\{I_k\}$的有限子覆盖$\{I_{i_1},I_{i_2},\cdots,I_{i_l}\}$，使得$\bigcup_{j=1}^{l}I_{i_j}\supset\bar{I}$. 易知$|I|\leqslant\sum_{j=1}^{l}|I_{i_j}|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|$. 由此又得$|I|\leqslant m^*(\bar{I})$. 从而有$m^*(I)=|I|$.

例3 证明：$[0,1]$中的康托尔集C的外测度是零.

证 因为$C=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$（由康托尔集的构造过程知，$F_n$是$2^n$个长度为$3^{-n}$的闭区间之并集），故

$$m^*(C)\leqslant m^*(F_n)\leqslant 2^n\cdot 3^{-n},\forall\ n\in\mathbf{N}.$$

从而得

$$m^*(C)=0.$$

例4 若k是1与n之间的某个整数，a是某实常数，并记

$$E=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_k=a,-\infty<x_i<+\infty,i\neq k\},$$

则E是$\mathbf{R}^n$中的零测集.

证 对$l\in\mathbf{N}$，记

$$E_l=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_k=a,-l<x_i<l,i\neq k\},$$

显然，$E=\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}E_{l,a}$. 满足 $m^*(E)=0$ 的集称勒贝格零测集，简称零测集，零测集的子集是零测集，有限个或可列个零测集之并仍是零测集. 所以只要证 E_i 是零测集.

$\forall\ \varepsilon>0$，取开区间

$$I_l=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):a-\frac{\varepsilon}{2(2l)^{n-1}}<x_k<a+\frac{\varepsilon}{2(2l)^{n-1}},\right.$$
$$\left.-l\leqslant x_i<l,i\neq k\right\},$$

显然，$E_l\subset I_l$，且 $m(I_l)=\varepsilon$. 由 ε 的任意性知，$m^*(E_l)=0$，故 $m^*(E)=0$.

例 5 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的零测集，即 $m^*(E)=0$，证明：

(1)零测集的子集仍是零测集；

(2)有限个或可列个零测集之并仍是零测集.

证 (1)E 是零测集，设 $E_1\subset E$，则由外测度的单调性，有 $m^*(E_1)\leqslant m^*(E)=0$，又 $m^*(E_1)\geqslant 0$，所以必有 $m^*(E_1)=0$.

(2)设 $E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$ 均为零测集，即 $m^*(E_k)=0$，由外测度的次可加性得 $m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)\equiv 0$，即有 $m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k)=0$. 故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 是零测集.

例 6 对于任何区间 E，证明：$m^*(E)=m(E)$.

证 (1)先证 E 为闭区间情形.

因为 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists$ 开区间 E_1，使 $E\subset E_1$，且 $m(E_1)=m(E)+\varepsilon$. 由外测度定义可得 $m^*(E)<m^*(E_1)<m(E)+\varepsilon$. 又由 ε 的任意性，得 $m^*(E)\leqslant m(E)$.

$\forall\ \varepsilon>0$，可取一列开区间 $\{I_i\}$，使 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$，且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}m(I_i)<m^*(E)+\varepsilon$. 由有限覆盖定理，在 $\{I_k\}$ 中存在有限多个区间(设为

$I_1, I_2, \cdots, I_m$)，使 $E \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_i$. 由于 $E = \bigcup_{i=1}^{m} (E \cap I_i)$，可见各个 $E \cap I_i$ 均为区间，所有这类区间 $E \cap I_i$ 的相应于第 k 个坐标的端点把 $[a_k, b_k]$ 划分为 $a_k = x_{k1} < x_{k2} < \cdots < x_{k1_k} = b_k$. 于是，这些 $\{x_{kj}: j = 1, 2, \cdots, 1_k; k = 1, 2, \cdots, m\}$ 把 E 分为若干个无公共内点的小区间. 可以推出，E 的测度等于这些小区间测度之和，但每个小区间至少包含在一个 $E \cap I_i$ 内，$E \cap I_i$ 的测度又等于包含在其中的那些小区间测度之和，因此 $m(E) \leqslant \sum_{i=1}^{m} m(E \cap I_i)$，故

$$m(E) \leqslant \sum_{i=1}^{m} m(E \cap I_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m} m(I_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) < m^*(E) + \varepsilon,$$

则由 ε 的任意性，得出 $m^*(E) \geqslant m(E)$.

综上所述，当 E 为闭区间时，$m^*(E) = m(E)$.

(2)设 E 为任意区间.

作闭区间 E_1 和 E_2，使 $E_1 \subset E \subset E_2$，且 $m(E_2) - \varepsilon < m(E) < m(E_1) + \varepsilon$，则由外测度的单调性与(1)的结果知

$$\begin{aligned} m(E) - \varepsilon \leqslant m(E_1) = m^*(E_1) \leqslant m^*(E) \leqslant m^*(E_2) \\ = m(E_2) < m(E) + \varepsilon, \end{aligned}$$

由 ε 的任意性，得 $m^*(E) = m(E)$.

因此，求 E 的测度 $m(E)$，只需求 $m^*(E)$.

例7 证明：[0,1]中无理数集的外测度为1.

证 设 E_1 是[0,1]中的无理点集，E_2 是有理点集，而 $[0,1] = E_1 \cup E_2$，因 E_2 可列，故 $m(E_2) = 0$（详见例1）. 于是有

$$1 = m^*[0,1] \leqslant m^*(E_1) + m^*(E_2) = m^*(E_1).$$

又因为 $E_1 \subset [0,1]$，依单调性有 $m^*(E) \leqslant m^*[0,1] = 1$.

综上所述，得 $m^*(E_1) = 1$.

例8 若 $m^*(A) = 0$，则对任意点集 B，有 $m^*(A \cup B) = m^*(B)$.

证 因为 $B \subset (A \cup B)$，依单调性，有 $m^*(B) \leqslant m^*(A \cup B) \leqslant$

$m^*(A)+m^*(B)=m^*(B)$. 所以$m^*(B)=m^*(A\cup B)$.

例9 若$m^*(E_1\backslash E_2)=m^*(E_2\backslash E_1)=0$,则

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1\cap E_2)=m^*(E_1)=m^*(E_2).$$

证 因为$m^*(E_1\backslash E_2)=0, E_1\subset[(E_1\backslash E_2)\cup E_2]$,故

$$m^*(E_1)\leqslant m^*(E_1\backslash E_2)+m^*(E_2)=m^*(E_2).$$

又$m^*(E_2\backslash E_1)=0, E_2\subset[(E_2\backslash E_1)\cup E_1]$,故

$$m^*(E_2)\leqslant m^*(E_2\backslash E_1)+m^*(E_1)=m^*(E_1).$$

于是,证得$m^*(E_1)=m^*(E_2)$.

因为$E_1\cup E_2=(E_1\backslash E_2)\cup(E_2\backslash E_1)\cup(E_1\cap E_2)$,所以有

$$m^*(E_1\cup E_2)\leqslant m^*(E_1\cap E_2).$$

又$(E_1\cup E_2)\supset(E_1\cap E_2)$,有$m^*(E_1\cup E_2)\geqslant m^*(E_1\cap E_2)$,故

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1\cap E_2).$$

又$E_1\subset(E_1\cup E_2)$,$(E_1\cap E_2)\subset E_1$,结合上式可得

$$m^*(E_1)\leqslant m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1\cap E_2)\leqslant m^*(E_1).$$

结合$m^*(E_1)=m^*(E_2)$,即得

$$m^*(E_1)=m^*(E_2)=m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1\cap E_2).$$

例10 设A,B是$\mathbf{R}^n$中的两个点集,且$m^*(A),m^*(B)<\infty$,证明:$|m^*(A)-m^*(B)|\leqslant m^*(A\triangle B)$,其中$A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

证 因为$A\subset[B\cup(A\backslash B)]$,$(A\backslash B)\subset(A\triangle B)$,由外测度的次可加性与单调性,得

$$m^*(A)\leqslant m^*(B)+m^*(A\backslash B)\leqslant m^*(B)+m^*(A\triangle B).$$

由$m^*(B)<\infty$,故不等式两边同时减去$m^*(B)$,得

$$m^*(A)-m^*(B)\leqslant m^*(A\triangle B).$$

类似可得$m^*(B)-m^*(A)\leqslant m^*(A\triangle B)$,综合即得

$$|m^*(A)-m^*(B)|\leqslant m^*(A\triangle B).$$

例11 设A,B,C是$\mathbf{R}^n$中的点集,且$m^*(A\triangle B)=0$,$m^*(B\triangle C)=0$,证明:$m^*(A\triangle C)=0$.

证　只需证明$A\triangle C=(A\triangle B)\cup(B\triangle C)$，即$(A\backslash C)\cup(C\backslash A)\subset[(A\backslash B)\cup(B\backslash A)]\cup[(B\backslash C)\cup(C-B)]$.

先证$(A\backslash C)\subset(A\backslash B)\cup(B\backslash C)$. 当$x\in(A\backslash C)$时，$x\in A$但$x\overline{\in}C$，此时，若$x\overline{\in}B$，则$x\in(A\backslash B)$；若$x\in B$，则$x\in(B\backslash C)$，所以$x\in(A\backslash B)\cup(B\backslash C)$，即$(A\backslash C)\subset(A\backslash B)\cup(B\backslash C)$.

类似可证$C\backslash A\subset[(C\backslash B)\cup(B\backslash A)]$.

综合即证$A\triangle C=(A\triangle B)\cup(B\triangle C)$，则

$$m^*(A\triangle C)=m^*(A\triangle B)+m^*(B\triangle C)=0.$$

例12　设A,B是$\mathbf{R}^n$中的两个点集，若$d(A,B)>0$，证明：

$$m^*(A+B)=m^*(A)+m^*(B).$$

证　由外测度的次可加性，$m^*(A+B)\leqslant m^*(A)+m^*(B)$. 故只需证$m^*(A+B)\geqslant m^*(A)+m^*(B)$.

设$m^*(A+B)<\infty$，$\forall\ \varepsilon>0$，作$A\cup B$的L-覆盖$\{I_k\}$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<m^*(A\cup B)+\varepsilon,$$

式中I_k的边长均小于$d(A,B)/\sqrt{n}$，将$\{I_k\}$分为两组：

(1)$J_{i_1},J_{i_2},\cdots,\bigcup\limits_{k\geqslant1}J_{j_k}\supset A$；

(2)$J_{l_1},J_{l_2},\cdots,\bigcup\limits_{k\geqslant1}J_{l_k}\supset B$.

且其中任一矩体中均不能同时含有A与B中的点，从而得

$$\begin{aligned}m^*(A\cup B)+\varepsilon&>\sum_{k\geqslant1}|I_k|=\sum_{k\geqslant1}|J_{j_k}|+\sum_{k\geqslant1}|J_{l_k}|\\&\geqslant m^*(A)+m^*(B).\end{aligned}$$

于是，由ε的任意性知$m^*(A+B)\geqslant m^*(A)+m^*(B)$.

例13(外测度的介值定理)　设E为实直线的有界集，$m^*(E)>0$，则对于任意小于$m^*(E)$的正数C，均有$E_1\subset E$，使$m^*(E_1)=C$.

证　因为E为有界集，所以可以在$[a,b]\supset E$上定义函数

$$f(x)=m^*(E\cap[a,x]),\quad x\in[a,b].$$

显然，当$x,y\in[a,b]$，$x\leqslant y$时，$(E\cap[a,x])\subset(E\cap[a,y])$. 依外测度的单调性，有$f(x)\leqslant f(y)$，故知$f$是$[a,b]$上的单调增加函

数.

任取$x\in[a,b]$与$h\geqslant 0$,使$x+h\in[a,b]$,依外测度性质,得

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=m^*(E\cap[a,x+h])-m^*(E\cap[a,x])\\&\leqslant m^*(E\cap[a,x])+m^*(E\cap[x+x+h])\\&\quad -m^*(E\cap[a,x])\\&=m^*(E\cap[x,x+h])\leqslant m^*([x,x+h])\\&=m([x,x+h])=h.\end{aligned}$$

故f在x处右连续.

类似可证f在x处左连续,从而得f在$[a,b]$上连续.

由$f(a)=0,f(b)=m^*(E)$,由$f(a)\leqslant C\leqslant f(b)$,则依闭区间上连续函数的介值定理,知存在$\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=C$,即$m^*(E\cap[a,\xi])=C$,取集合$E_1=E\cap[a,\xi]$,则有$E_1\subset E$,且$m^*(E_1)=C$.

例 14 设E是$\mathbf{R}^1$中闭集,且又是零集,证明:E必为疏朗集.

证 此时,E必不含任何内点,故为疏朗集.

例 15 设E为零测集,问闭包$\overline{E}$是否为零测集.

解 $m^*(E)=0$,不一定有$m^*(\overline{E})=0$. 例如,有理数全体是可列集,因而是零测集,但其闭包是全直线,显然不是零测集.

第二节 可测集与波雷尔集

主要内容

1. 设$E\subset\mathbf{R}^n$,若对任意的点集$T\subset\mathbf{R}^n$,有

$$m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^C),$$

则称E为勒贝格可测集(或m^*—可测集),简称可测集. T称为试验集. 该等式称卡拉西奥多利(Carathéodory)条件. 可测集的全体称为可测集类,记做$\mathscr{M}$,$\mathscr{M}$的基数是$2^{\aleph}$.

(1)若$E_1\subset S,E_2\subset S^C,S\in\mathscr{M}$. 则

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2).$$

(2)若 $E_1\in\mathscr{M}$，$E_2\in\mathscr{M}$，$E_1\cap E_2=\varnothing$，对任一集合 T 有

$$m^*(T\cap(E_1\cup E_2))=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_2).$$

2. 可测集的性质

(1)$\varnothing\in\mathscr{M}$；

(2)若 $E\in\mathscr{M}$，则 $E^C\in\mathscr{M}$；

(3)若 $E_1\in\mathscr{M}$，$E_2\in\mathscr{M}$，则 $E_1\cup E_2$，$E_1\cap E_2$ 以及 $E_1\backslash E_2$ 均属于 $\mathscr{M}$；

(4)若 $E_i\in\mathscr{M}(i=1,2,\cdots)$，则其并集也属于 $\mathscr{M}$；若有 $E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$，则

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(E_i),$$

即 m^* 在 $\mathscr{M}$ 上满足可数可加性(或称 σ-可加性).

由上可知，$\mathbf{R}^n$ 中可测集类构成一个 σ-代数. 对于可测集 E，其外测度称为测度，记为 $m(E)$.

3. 一般地，设 X 为非空集合，$\mathscr{A}$ 是 X 中一些子集构成的 σ-代数，若 $\mathscr{M}$ 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的一个集合函数，且满足

(1)$0\leqslant\mathscr{M}(E)\leqslant\infty(E\in\mathscr{M})$，

(2)$\mathscr{M}(\varnothing)=0$，

(3)$\mathscr{M}$ 在 $\mathscr{A}$ 上是可数可加的，则称 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{A}$ 上的测度. $\mathscr{A}$ 中的元素称为($\mathscr{M}$)可测集，序组($X,\mathscr{A},\mathscr{M}$)称为测度空间.

4. 若有递增可测集合列 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\cdots$，则

$$m(\lim_{k\to\infty}E_k)=\lim_{k\to\infty}m(E_k).$$

若有递减可测集合列 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_k\cdots$，且 $m(E_1)<\infty$，则

$$m(\lim_{k\to\infty}E_k)=\lim_{k\to\infty}m(E_k).$$

5. $\mathbf{R}^n$ 中的开矩体 $I=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_n,b_n)$ 是可测集.

由此可知半开闭矩体、闭矩体也是可测集，其测度即其体积. 开集、闭集及一切波雷尔集均为可测集.

6. 若 $E\in\mathscr{M}$，则 $\forall\ \varepsilon>0$，有

(1)存在包含E的开集G,使得$m(G\setminus E)<\varepsilon$;

(2)存在含于E的闭集F,使得$m(E\setminus F)<\varepsilon$.

7. 若$E\in\mathscr{M}$,则存在H,K,Z_1,Z_2,使得

(1)$E=H\setminus Z_1$,H是G_δ集,$m(Z_1)=0$;

(2)$E=K\setminus Z_2$,K是F_σ集,$m(Z_2)=0$.

8. 若$E\subset\mathbf{R}^n$,则存在包含E的G_δ集G,使得$m(G)=m^*(E)$(G也称为E的等测包).

若有$\mathbf{R}^n$中的集合列$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\subset\cdots$,则

$$\lim_{k\to\infty}m^*(E_k)=m^*(\lim_{k\to\infty}E_k).$$

9. 若$E\in\mathscr{M}$,$x_0\in\mathbf{R}^n$,则$(E+\{x_0\})\in\mathscr{M}$,且

$$m(E+\{x_0\})=m(E).$$

10. 设E是可测集,则有F_σ集F,使$F\subset E$,且$m(F)=m(E)$.

11. 集E可测的充要条件是:$\forall\ \varepsilon>0$,存在开集G和闭集F,使得$G\supset E\supset F$,且$m^*(G-F)<\varepsilon$.

疑 难 解 析

1. 卡拉西奥多利条件的意义是什么?

答 勒贝格给出的测度定义是用$m^*(E)=m_*(E)$给定的. 点集内、外测度的直观意义相当于用圆的内接多边形面积与外切多边形面积来近似圆的面积,虽然比较真实、自然,但是要使用两个概念,还要区别无界集与有界集,讨论问题常常觉得不太方便.

卡拉西奥多利条件是一个较为简洁的等价条件. 对$\mathbf{R}^n$中的任一点集E,E可测相当于它能够分割测量任何点集$F(F\subset\mathbf{R}^n)$的外测度. E把F分割为$F\cap E$与$F\cap E^C$,则其并集(即F)的外测度就等于这两集的外测度之和,即

$$m^*(F)=m^*(F\cap E)+m^*(F\cap E^C).$$

2. 可测集族与波雷尔集族有何区别?

答 任何可测集必是一个波雷尔集与一个测度为零的可测集的并集,也是一个波雷尔集与一个测度为零的可测集的差集(见主

要内容7). 此定理说明了勒贝格可测集与波雷尔集之间的关系. 因为从测度的角度来看,定理指出:存在包含E的G_δ集H,使$m(H)=m(E)$;存在含于E的F_δ集K,使$m(K)=m(E)$. 称H与K为E的等测包与等测核.

但是,不能认为这两个集族是等同的. 因为确实存在不是波雷尔集的可测集,所以波雷尔集族是可测集族的真子族.

3. 波雷尔测度与勒贝格测度有何联系?

答 一般地,若在波雷尔σ-代数上定义了测度μ,且对紧集K有$\mu(K)<\infty$,则称μ为波雷尔测度($\mathbf{R}^n$上的勒贝格测度是一种波雷尔测度).

可以证明:若μ是$\mathbf{R}^n$上的平移不变的波雷尔测度,则存在常数λ,使得对于$\mathbf{R}^n$中每一个波雷尔集合B,有$\mu(B)=\lambda\cdot m(B)$. 即,除了一个常数因子外,勒贝格测度是$\mathbf{R}^n$上平移不变的惟一的波雷尔测度.

4. G_δ型集与F_σ型集之间有什么关系? 与可测集又有什么关系?

答 若集合G可以表示为一列开集$\{G_i\}$之交,即$G=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}G_i$,则称$G$为$G_\delta$集;若集合$F$可以表示为一列闭集$\{F_i\}$之并,即$F=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i$,则称$F$为$F_\sigma$集. 由定义与和通关系知:$G_\delta$型集的余集是$F_\sigma$集,$F_\sigma$集的余集是$G_\delta$集. 例如,若记$\mathbf{R}^1$中有理数全体为$r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$,则因为$\mathbf{R}^1$中单元素集为闭集,知有理数集$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{r_k\}$是$F_\sigma$型集. 由此可知,无理数集$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\{\mathbf{R}^1\setminus\{r_k\}\}$是$G_\delta$型集.

G_δ型集,F_σ型集与可测集E存在下列关系.

下列命题等价:

(1)E是可测集;

(2)存在G_δ型集G,使得$G\supset E$,且$m^*(G\setminus E)=0$;

(3)存在F_σ型集F,使得$F\subset E$,且$m^*(E\setminus F)=0$;

(4)存在G_δ型集G和F_σ型集F,使得$G\supset E\supset F$,而且$m(G\setminus F)=0$.

方法、技巧与典型例题分析

判断一个集合是否为勒贝格可测集,可以依据可测的定义,也可以用卡拉西奥多利条件或者利用测度的性质. 用定义是比较麻烦的,一般使用验卡拉西奥多利(简称卡氏)条件的方法来判断. 用性质判断要具备一定的条件,利用与已知可测集的关系或者性质进行推断.

计算集合的测度一般利用集合间的关系和外测度(或测度)的性质进行推算,其技巧表现为怎样把一个点集分解为已知测度或可求测度集合的组合,请读者认真体会例题.

对于比较困难的问题,需按照题目要求构造一个有特定性质或特定测度的可测集,这要求读者熟悉不同性质集合的构造方式以及该集合与已知集合之间的关系,并能利用这个关系与运算性质进行推断.

例1 证明:勒贝格零测集必是勒贝格可测集.

证 设$m^*(E)=0$,证明E满足卡氏条件.

设F是$\mathbf{R}^n$中任一点集,由外测度的单调性,

$$m^*(F\cap E)+m^*(F\cap E^C)\leqslant m^*(E)+m^*(F)=m^*(F).$$

又由外测度的可加性知

$$m^*(F)\leqslant m^*(F\cap E)+m^*(F\cap E^C).$$

故E满足卡氏条件,是勒贝格可测集.

例2 设E_1可测,E_2是任意点集,证明:

$$m^*(E_1\cup E_2)+m^*(E_1\cap E_2)=m(E_1)+m^*(E_2).$$

证 若$m(E_1)$与$m^*(E_2)$至少有一个是∞,则命题显然成立. 设$m(E_1)<\infty,m^*(E_2)<\infty$,则由$E_1$的可测性,对任意点集$T$有$m^*(T)=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_1^C)$.

令$T=E_1\cup E_2$,代入上式,得

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*[(E_1\cup E_2)\cap E_1]+m^*[(E_1\cup E_2)\cap E_1^C]$$
$$=m^*(E_1)+m^*(E_2\cap E_1^C).$$

再令 $T=E_2$ 代入，得

$$m^*(E_2)=m^*(E_2\cap E_1)+m^*(E_2\cap E_1^C).$$

将所得两式综合即得

$$m^*(E_1\cup E_2)+m^*(E_1\cap E_2)$$
$$=m^*(E_1)+m^*(E_2)=m(E_1)+m^*(E_2).$$

例3 设 $E_1,E_2,\cdots,E_l$ 是互不相交的可测集，F 为任一点集，证明：

$$m^*[F\cap(\bigcup_{i=1}^{l}E_i)]=\sum_{i=1}^{l}m^*(F\cap E_i).$$

证 为简单计，取 $l=2$（$l>2$ 类似可证）.

因为 E_1,E_2 可测，满足卡氏条件，故

$$m^*[F\cap(E_1\cup E_2)]$$
$$=m^*[F\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1]+m^*[F\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1^C]$$
$$=m^*(F\cap E_1)+m^*(F\cap E_2),$$

命题得证. 该结论可以推广到 l 为有限数情形.

例4 实直线上只含一个内点的集 E 的测度是否等于零？

解 不等于零. 因为 E 内含一个 x_0，则必有 x_0 的某邻域 $N(x_0,\delta)\subset E$. 而 $N(x_0,\delta)$ 的测度即开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 的长度为 $2\delta(\delta>0)$，所以，测度 $m(E)>m[N(x_0,\delta)]>0$.

例5 设 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$，$E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$，对任意 n，$m(E_n)=\infty$，求 E 的测度.

解 $m(E)$ 可以是 ∞，0 或 a $(0<a<\infty)$. 如：

(1) 若 $E_n=[-\frac{1}{n},\infty)$，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=[0,\infty)$，$m(E)=\infty$.

(2) 若 $E_n=[-1,0]\cup(n,\infty)$，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=[-1,0]$，$m(E)=1$.

(3) 若 $E_n=[n,\infty)$，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing$，$m(E)=0$.

例6 在$\mathbf{R}^1$中作一个仅含无理数的闭集F,使$m(F)>0$.

解 记$\mathbf{R}^1$中有理数全体为$r_1,r_2,\cdots$,作集$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n-1/2^n, r_n+1/2^n)$,使$m(G)\leqslant 1$,再作$F=\mathbf{R}^1\setminus G$,则$F$是只含无理数的闭集,且$m(F)>0$.

例7 设在$[0,1]$中有勒贝格可测集$E_1,E_2,\cdots,E_n$,满足条件$\sum_{i=1}^{n}m(E_i)>n-1$,证明:交集$\bigcap_{i=1}^{n}E_i$有正测度.

证 因为$\bigcap_{i=1}^{n}E_i=[0,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{n}([0,1]\setminus E_i)$,所以

$$m(\bigcap_{i=1}^{n}E_i)=1-m(\bigcup_{i=1}^{n}([0,1]\setminus E_i))\geqslant 1-\sum_{i=1}^{n}m([0,1]\setminus E_i)$$

$$=1-\sum_{i=1}^{n}[1-m(E_i)]$$

$$=1-n+\sum_{i=1}^{n}m(E_i)>1-n+(n-1)=0.$$

命题得证.

例8 作一闭集$F\subset[0,1]$,使F中不含任何开区间,且$m(F)=1/2$.

解 先在$[0,1]$中间去掉长为$\frac{1}{4}$的开区间$\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$;再在余下的两个闭区间中间各去掉长为$\frac{1}{4^2}$的开区间$\left(\frac{5}{32},\frac{7}{32}\right)$,$\left(\frac{25}{32},\frac{27}{32}\right)$;再在余下的四个闭区间中间去掉长为$\frac{1}{4^3}$的开区间(有4个)……继续进行下去,则第$n$次去掉的开区间长为$\frac{1}{4^n}$(有$2^{n-1}$个)……再继续下去,得到一列开区间,其并为

$$G=\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)\cup\left(\frac{5}{32},\frac{7}{32}\right)\cup\left(\frac{25}{32},\frac{27}{32}\right)\cup\cdots,$$

于是 $$m(G)=\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4^2}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{4^n}+\cdots$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots=\frac{1}{2}.$$

令 $F=[0,1]-G$,则 F 为不含任何开区间的闭集,且 $m(F)=m[0,1]-m(G)=1-1/2=1/2$.

例9 若将外测度定义改为:$m^*(E)$为包含E 的可测集测度的下确界,则此时定义的外测度与原来定义的外测度有何关系?

答 两者等同.

原来定义是:$m^*(E)=\inf\limits_{G\supset E}m(G)$($G$ 为包含 E 开集).

现设 $\inf\limits_{A\supset E,A可测} m(A)=a$,由于可测集族包含开集族,故

$$\inf_{G\supset E,G为开集} m(G)\geqslant \inf_{A\supset E,A可测} m(A)=a.$$

由 $\inf\limits_{A\supset E,A可测} m(A)=a$,所以$\forall\ \varepsilon>0$,存在可测集 $A_1\supset E$,使 $m(A_1)<a+\varepsilon/2$. 又因A_1 可测,必存在开集$G_1\supset A_1\supset E$,使$m(G)\leqslant m(A_1)+\varepsilon/2<a+\varepsilon$. 由 ε 的任意性得

$$\inf_{G\supset E,G为开集} m(G)\leqslant a=\inf_{A\supset E,A可测} m(A).$$

综上所述,$\inf\limits_{G\supset E,G为开集} m(G)=a=\inf\limits_{A\supset E,A可测} m(A)$. 所以两个定义相等.

例10 设E 是直线上一个具有正测度的可测集,则 E 中必有两点 x 与 y,使 $d(x,y)$是无理数.

证 任取$x\in E$,作集合 $E_1=\{y-x:x\in E\}$. 因为$m(E)>0$,所以E 不是可列集,又$\overline{E}_1=\overline{E}$,故$E_1$ 也不是可列集,则E_1 中至少含有一个无理数,即有x、$y\in E$,使$y-x$ 是无理数. 于是,$d(x,y)=|y-x|$是无理数.

类似可证,存在 $x,y\in E$,使 $d(x,y)$是有理数.

例11 设E_1,E_2 都是$\mathbf{R}^n$ 中的点集,$E_1\subset E_2$,$E_1\in\mathscr{M}$,且$m(E_1)=m^*(E_2)<\infty$. 证明:$E_2\in\mathscr{M}$.

证 已知$E_1\in\mathscr{M}$,利用卡氏条件可得

$$m^*(E_2)=m^*(E_2\cap E_1)+m^*(E_2\backslash E_1)=m(E_1)+m^*(E_2\backslash E_1).$$

因为$m^*(E_2)=m(E_1)<\infty$,所以$m^*(E_2\backslash E_1)=0$,故而$E_2\backslash E_1$ 可测,

从而知$E_2=E_1\cup(E_2\setminus E_1)$是可测的.

例12 设$S_1,S_2,\cdots,S_n$是互不相交的可测集,$E_i\subset S_i$,$i=1,2,\cdots,n$,证明:$m^*(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)=\sum_{i=1}^{n}m^*(E_i)$.

证 用数学归纳法. $n=1$时,等式显然成立. 设$n=k$时成立. 当$n=k+1$时,利用$\bigcup_{i=1}^{k}S_i$的可测性与卡氏条件,可得

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{k+1}E_i)=m^*[(\bigcup_{i=1}^{k+1}E_i)\cap(\bigcup_{i=1}^{k}S_i)]+m^*[(\bigcup_{i=1}^{k+1}E_i)\setminus(\bigcup_{i=1}^{k}S_i)]$$

$$=m^*(\bigcup_{i=1}^{k}E_i)+m^*(E_{k+1})=\sum_{i=1}^{k}m^*(E_1)+m^*(E_{k+1})$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}m^*(E_i).$$

例13 证明:在$[0,1]$中不存在具有下述性质的可测集E,对于任何的$[a,b]\subset[0,1]$,有

$$m(E\cap[a,b])=\frac{1}{2}(b-a).$$

证 若$m(E)=0$,E显然不符合要求. E必须有$1>m(E)>0$,故不妨设$E\subset(0,1)$. 取$(0,1)$中的开集G,使$E\subset G$,且$m(G\setminus E)<\frac{1}{2}m(E)<\frac{1}{2}m(G)$. 于是

$$m(G\cap E)=m(G)-m(G\setminus E)>\frac{1}{2}m(G).$$

设$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$,$\{(\alpha_n,\beta_n):n=1,2,\cdots\}$是$G$的构成区间,有$\sum_{n=1}^{\infty}m(E\cap(\alpha_n,\beta_n))>\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n)$. 故不可能对一切$n$均有

$$m(E\cap(\alpha_n,\beta_n))=\frac{1}{2}(\beta_n-\alpha_n).$$

例14 设S_1,S_2均为可测集,且$S_2\subset S_1$,$m(S_2)<\infty$,证明:$m(S_1-S_2)=m(S_1)-m(S_2)$.

证 由题设,有$(S_1-S_2)\cap S_2=\varnothing$,且$S_1-S_2$可测. 则由测度

的完全可加性，有

$$m(S_1)=m(S_1-S_2)\cup S_2=m(S_1-S_2)+m(S_2),$$

所以 $$m(S_2-S_1)=m(S_1)-m(S_2)\quad (m(S_2)<\infty).$$

例 15 设 $E_1\subset E_2\subset\cdots$，$E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，若 E 是一个有界集，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}m^*(E_n)=m^*(E)$.

证 由题设可知 $\{m^*(E_n)\}$ 是单调增加的有界数列，故 $\lim\limits_{n\to\infty}m^*(E_n)$ 必存在.

由外测度的单调性知 $m^*(E_n)\leqslant m^*(E)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}m^*(E_n)\leqslant m^*(E)$.

对 $\mathbf{R}^n$ 中任一点集 E，必存在包含 E 的 G_δ 型集 G，使 $m^*(E)=m(G)$. 事实上，对每个自然数 k，存在包含 E 的开集 G_k，使 $m(G_k)\leqslant m^*(E)+1/k$. 作点集 $G=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}G_k$，则 G 是 G_δ 集，且 $D\supset E$，由外测度的单调性，有

$$m^*(E)\leqslant m(G)\leqslant m(G_k)\leqslant m^*(E)+1/k.$$

故由 k 的任意性，知 $m^*(E)=m(G)$. 由此，取 G_δ 集 G_n，使 $E_n\subset G_n$，且 $m^*(E_n)=m(G_n)$. 记 $G=\varliminf\limits_{n\to\infty}G_n$，于是，$G$ 是可测集，且 $E\subset G$. 而 $m(\varliminf\limits_{n\to\infty}G_n)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}m(G_n)$（见例 16），因此

$$m^*(E)\leqslant m(G)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}m(G_n)=\lim_{n\to\infty}m^*(E_n).$$

综上所述，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}m^*(E_n)=m^*(E)$.

例 16 设 $\{E_n:n=1,2,\cdots\}$ 是一列可测集，证明：$m(\varliminf\limits_{n\to\infty}E_n)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}m(E_n)$.

证 先将求集合序列下限集的运算转化为求单调集列极限的运算，然后利用测度的性质进行必要的讨论.

由于 $\varliminf\limits_{n\to\infty}E_n=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，记 $F_k=\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}E_n$，这样的 F_k $(k=1,2,\cdots)$ 是单调增加的，且 $F_k\subset E_k$，所以

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)=\lim_{k\to\infty}m(F_k),\quad m(F_k)\leqslant m(E_k).$$

对后一式两边取下限，注意到左边实际上存在极限，故有 $\lim\limits_{k\to\infty}m(F_k)\leqslant\varliminf\limits_{k\to\infty}m(E_k)$. 综上所述得

$$m(\varliminf_{n\to\infty}E_n)=m(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)=\lim_{k\to\infty}m(F_k)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}m(E_n).$$

例17 设$\{E_n\}$是一列可测集，N 是某自然数，$m(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}E_n)<\infty$，证明：$m(\varlimsup\limits_{n\to\infty}E_n)\geqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}m(E_n)$.

证 由于$\varlimsup\limits_{n\to\infty}E_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}E_m$，记 $F_n=\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}E_n$，这样的$\{E_n\}$是单调减少集列，且 $F_n\supset E_n$.

由题设知，$n\geqslant N$ 时，$m(F_n)<\infty$，所以

$$m(\varlimsup_{n\to\infty}E_n)=m(\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n)=\varlimsup_{n\to\infty}m(F_n)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}m(E_n).$$

例18 设可测集$A\subset[-1,1]$，且$m(A)>1$，证明：存在A 的正测子集关于原点对称.

证 记集$E=A\cap[-1,0]$，集$F=A\cap[0,1]$，则$A=E\cup F$. 作反射变换$\varphi(x)=-x$，并记$E^*=\varphi(E)$，$G^*=E^*\cap F$，$G=\varphi(G^*)$. 再令 $B=G\cup G^*$，则 B 即为所求.

因为，由集的作法知B 关于原点对称. 由$G^*\subset F$，$G\subset E$，可知$B\subset A$. 又由 $E^*\subset[0,1]$，$F\subset[0,1]$，且

$$m(E^*)+m(F)=m(E)+m(F)=m(E\cup F)=m(A)>1,$$

由例7结论可知$m(G^*)=m(E^*\cap F)>0$.

又$m(G)=m(G^*)$，故$m(B)=2m(G^*)>0$，即知B 为A 的关于原点对称的正测子集.

例19 设有映射$f:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$，$f(x)=x^3$. 证明：$f$ 把零集映为零集，把可测集映为可测集.

证 (1)设E 是$\mathbf{R}^1$ 中的零集. 对任何$N\in\mathbf{N}$，证$f(E\cap(-N,N))=f(E)\cap(-N^3,N^3)$是零集.

因为$E\cap(-N,N)$是零集，故$\forall\ \varepsilon>0$，存在开集G，使得$G\supset E\cap$

$(-N,N)$，且$m(G)<\varepsilon/(3N^6)$. 不妨设$(-N,N)\supset G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$，其中$\{(\alpha_k,\beta_k):k=1,2,\cdots\}$是$G$的构成区间. 易见

$$f(E\cap(-N,N))\subset f(G)=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^3,\beta_k^3),$$

因为$f(G)$是开集，且

$$m(f(G))=\sum(\beta_k^3-\alpha_k^3)=\sum(\beta_k-\alpha_k)\cdot(\beta_k^2+\alpha_k\beta_k+\alpha_k^2)$$
$$\leqslant 3N^6\cdot\sum(\beta_k-\alpha_k)<\varepsilon,$$

所以$f(E\cap(-N,N))$是零集，故确定f映零集为零集.

(2)在f的作用下，任何开区间(α,β)的像是开区间(α^3,β^3)，故开集的像是开集，又知任何G_δ集的像是G_δ集. 已知任何一个可测集均可表示为一个G_δ集与一个零集的差集，从而知可测集的像仍为可测集.

类似可证，$f(x)=x^2$时，结论依然成立.

例 20 设$\{E_n\}$是一列可测集，$E_n\subset[0,1]$，$n=1,2,\cdots$，且1是$\{m(E_n):n=1,2,\cdots\}$的极限点，证明：存在子列$\{E_{n_k}\}$，使

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-m(E_{n_k}))<1,\quad m\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k}\Big)>0.$$

证 取子列$\{n_k\}$，$n_1<n_2<\cdots$，使得$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-m(E_{n_k}))<1$，于是

$$m\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k}\Big)=m\Big[[0,1]\setminus\Big([0,1]\setminus\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k}\Big)\Big]$$
$$=1-m\Big[\bigcup_{k=1}^{\infty}([0,1]\setminus E_{n_k})\Big]$$
$$\geqslant 1-\sum_{k=1}^{\infty}[1-m(E_{n_k})]>0.$$

例 21 设A,B是$\mathbf{R}^n$中任意两个集合，证明：

$$m^*(A\cup B)+m^*(A\cap B)=m^*(A)+m^*(B).$$

证 若$m^*(A),m^*(B)$至少有一个是∞，结论显然成立. 设$m^*(A)<\infty,m^*(B)<\infty$.

利用例15中所证的，对$\mathbf{R}^n$中任一点集E，必存在包含E的G_δ

集G,使$m^*(E)=m(G)$. 取G_δ集G,使$(A\cap B)\subset G$,且$m^*(A\cap B)=m(G)$,则由G的可测性,得

$$m^*(A)=m^*(A\cap G)+m^*(A\setminus G),$$

$$m^*(B)=m^*(B\cap G)+m^*(B\setminus G).$$

因为$m^*(A\cap B)\leqslant m^*[(A\cap B)\cap G]\leqslant m^*(G)=m^*(A\cap B)$,所以$m^*[(A\cup B)\cup G]=m^*(A\cap B)$,这时有

$$\begin{aligned}&m^*(A\cup B)+m^*(A\cap B)\\&=m^*[(A\cup B)\cap G]+m^*[(A\cup B)\setminus G]+m^*(A\cap B)\\&=2m^*(A\cap B)+m^*[(A\cup B)\setminus G]\\&\leqslant m^*(A\cap G)+m^*(B\cap G)+m^*(A\setminus G)+m^*(B\setminus G)\\&=m^*(A)+m^*(B).\end{aligned}$$

例2也可以作为本例的特殊情形.

例22 设E是$\mathbf{R}^1$上的可测集,且$m(E)\neq 0$,证明:对任何c $(0<c<1)$,必存在区间(a,b),使

$$m[E\cap(a,b)]>c(b-a).$$

证 由于$m(E)=\inf\{m(G):G$是包含E的开集$\}$. 对给定的c $(0<c<1)$,取开集G,使$E\subset G$,且$m(G)<\frac{1}{c}m(E)$,即$c\,m(G)<m(E)$.

设$G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$,$\{(\alpha_k,\beta_k)\}$是$G$的构成区间,故

$$c\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)<m(E)=m(E\cap G)=\sum_{k=1}^{\infty}m[E\cap(\alpha_k,\beta_k)].$$

于是,至少存在一个k,使得

$$c(\beta_k-\alpha_k)<m[E\cap(\alpha_k,\beta_k)],$$

只要取$(a,b)=(\alpha_k,\beta_k)$,命题即证.

例23 设E是$\mathbf{R}^1$上的可测集,$m(E)\neq 0$,$D=\{x-y:x,y\in E\}$,证明:D必包含一个含有原点的开区间.

证 利用上例结果,取$C=\frac{3}{4}$,并取开区间(a,b),使得$m[E\cap$

$(a,b)]\geqslant\frac{3}{4}(b-a)$.

对 $x\in\left[-\frac{1}{2}(b-a),\frac{1}{2}(b-a)\right]$,要证 $x\in D$,只需要证 $E\cap(E+x)\neq\varnothing$.

用反证法. 设 $[E\cap(a,b)]\cap[E\cap(a,b)+x]=\varnothing$,则因为

$$[E\cap(a,b)]\cup[E\cap(a,b)+x]\subset(a,b)\cup(a+x,b+x)$$
$$\subset\left[a-\frac{1}{2}(b-a),b+\frac{1}{2}(b-a)\right],$$

于是 $$m([E\cap(a,b)]\cup[E\cap(a,b)+x])\leqslant\frac{3}{2}(b-a).$$

但是,由测度的可加性与平移不变性,又有

$$m([E\cap(a,b)]\cup[E\cap(a,b)+x])=2m[E\cap(a,b)]>\frac{3}{2}(a-b),$$

引出矛盾,所以存在 $\left(-\frac{1}{2}(b-a),\frac{1}{2}(b-a)\right)\subset D$.

例24 设 E 是 $\mathbf{R}^1$ 中的可测集,$a\in\mathbf{R}^1$,$\delta>0$. 若对于满足 $|x|<\delta$ 的一切 x,$a+x$ 与 $a-x$ 之中必有一点属于 E,证明:$m(E)\geqslant\delta$.

证 由题设,

$$\{x:|x|<\delta\}=\{x:a+x\in E,|x|<\delta\}\cup\{x:a-x\in E,|x|<\delta\}.$$

所以 $2\delta\leqslant m(\{x:a+x\in E,|x|<\delta\})+m(\{x:a-x\in E,|x|<\delta\})$.

这时,上式右边两项中至少有一项不小于 δ. 不妨设 $m(\{x:a+x\in E,|x|<\delta\})\geqslant\delta$,于是,由测度的平移不变性,有

$$m(E)=m(\{y:y+a\in E\})\geqslant m(\{x:x+a\in E,|x|<\delta\})\geqslant\delta.$$

第三节 不可测集与连续变换

主要内容

一、不可测集

1. 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集,且 $m(E)>0$,$0<\lambda<1$,则存在矩体

I,使得$\lambda|I|<m(I\cap E)$.

2. 设E是$\mathbf{R}^n$中的可测集,且$m(E)>0$,作(向量差)点集

$$E-E\equiv[x-y:x,y\in E],$$

则存在$\delta>0$,使得$E-E\supset B(0,\delta)$.

3. 构造不可测集的思想(在$\mathbf{R}^1$上).

在直线上作一个集Z,要求对集Z可以取这样的一列数$r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$,使得$Z$经过平移$r_n$后,得到集$Z_n=Z+\{r_n\}$具有如下两条性质:

(1)$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}Z_n$包含一个区间(如$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}Z_n\supset[0,1]$);

(2)$\{Z_n\}$是一列互不相交的集,且$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}Z_n$有界(如$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}Z_n\subset[-1,2]$).

若Z具有这两条性质,Z一定不勒贝格可测,即Z是不可测集.

二、连续变换与可测集

对于$\mathbf{R}^n$中的平移变换T,若$E\in\mathscr{M}$,则有$T(E)\in\mathscr{M}$.

1. 设有变换$T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$. 若对任一开集$G$,$T^{-1}(G)$,即$\{x\in\mathbf{R}^n: T(x)\in G\}$是一个开集,则称$T$是从$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}^n$的连续变换.

2. 变换$T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$是连续变换的充分必要条件为:$\forall\ x\in\mathbf{R}^n$及$\varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,使得当$|y-x|<\delta$时,有$|T(y)-T(x)|<\varepsilon$.

3. 设$T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$是连续变换. 若$K$是$\mathbf{R}^n$中的紧集,则$T(K)$是$\mathbf{R}^n$中的紧集.

若E是F_σ集,则$T(E)$也是F_σ集.

若对$\mathbf{R}^n$中的任一零测集Z,$T(Z)$必为零测集,则对$\mathbf{R}^n$中的任一可测集E,$T(E)$必为可测集.

4. 若$T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$是非奇异线性变换,$E\subset\mathbf{R}^n$,则

$$m^*(T(E))=|\det T|\cdot m^*(E),$$

$\det T$表示矩阵T的行列式.

T至多可以表为以下几个初等变换的乘积:

(1)坐标$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$之间的交换;

(2) $\xi_1 \to \beta\xi_1, \xi_i \to \xi_i (i=2,3,\cdots,n)$;

(3) $\xi_1 \to \xi_1+\xi_2, \xi_i \to \xi_i (i=2,3,\cdots,n)$.

设 $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是非奇异线性变换. 若 $E \in \mu$，则 $T(E) \in \mu$，且有 $m(T(E)) = |\det T| \cdot m(E)$.

疑 难 解 析

怎样构造不可测集?

答 含于 $\mathbf{R}^n$ 中的点集并非都是勒贝格可测的. 主要内容3中指出了不满足两条性质的集 Z 是不勒贝格可测的，这是因为：如果 Z 是可测的，而且 $m(Z)=m(Z_n)$，由于 Z 是两两不相交的，所以

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(Z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(Z), \qquad ①$$

又因为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ 是有界集，并且它包含一个长度不为零的区间，由测度的单调性知

$$0 < m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\right) < \infty. \qquad ②$$

由式①，②知，$m(Z)$ 必须等于零却又不等于零，所以 Z 必是不可测集.

设 $\mathbf{Q}^n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有理点集. 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的点 x 与 y，若 $x-y \in \mathbf{Q}^n$，则记为 $x \sim y$. 根据这一等价关系“$\sim$”，将 $\mathbf{R}^n$ 中一切点分类，凡有等价关系者均属一类(例如 $\mathbf{Q}^n$ 本身即为其中一类). 根据策墨罗选择公理，在每一类中取出一元且只取一元构成点集，记做 W. 则 W 为不可测集.

若 $W>0$，则 $m(W)>0$，但点集 $W-W$ 含有一球 $B(0,\delta)$，使 $x \in (W-W) \cap \mathbf{Q}^n$，$x \neq 0$(见主要内容一中1,2)，与 W 的构成矛盾. 否则，$m(W)=0$，此时作可列个平移集 $W+\{r^{(k)}\}$，$\{r^{(1)}, r^{(2)}, \cdots, r^{(k)}, \cdots\} = \mathbf{Q}^n$，则 $\mathbf{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty}(W+\{r^{(k)}\})$ 也是零测集，这是不可能的，所以，W 不是勒贝格可测集.

方法、技巧与典型例题分析

讨论一个点集是否不可测集，可以由构成方式去考察，也可以用反证法去寻找矛盾．用构成方式去考察比较麻烦．

例1 设W是$[0,1]$中的不可测集，证明：存在$\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，使对于$[0,1]$中任一个满足$m(E)\geqslant\varepsilon$的可测集$E$，$W\cap E$是不可测集．

证 用反证法．取$\varepsilon_n\in(0,1)$，$\varepsilon_n\xrightarrow{n\to\infty}1$．记相应的可测集为$\{E_n\}$，作$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，易知$m(E)=1$．由$m(W\cap E^C)=0$可知，$W=(W\cap E)\cup(W\cap E^C)$为可测集．引出矛盾．

例2 设E是$\mathbf{R}^1$中的不可测集，A是$\mathbf{R}^1$中的零测集，证明：$E\cap A^C$必为不可测集．

证 $E=(E\cap A)\cup(E\cap A^C)$，用反证法．

若$E\cap A^C$可测，$E\cap A$是E的子集，故仍为零测集，则E为可测集，引出与假设矛盾．所以$E\cap A^C$必为不可测集．

例3 设E是$\mathbf{R}^1$中的点集，且$m^*(E)>0$，证明：E必含有不可测子集．

证 设$E\subset[0,1]$，对$x,y\in E$，规定当$x-y$是有理数时，$x\sim y$．对$x\in E$，记$\tilde{x}=\{y:y\in E,y\sim x\}$，称$\tilde{x}$是以$x$为代表元的等价类，对$E$中任何两元素$x,y$，$\tilde{x}$与$\tilde{y}$或者完全一致，或者互不相交，而$E$是这些等价类的并．若在每个等价类中取一个元素，则构成集合Z，$Z\subset E$．

证明Z不可测，用反证法．设Z可测，当$m(Z)>0$时，由上节例23知，存在$\delta>0$，使$(-\delta,\delta)\subset\{x-y:x,y\in Z\}$，但$(-\delta,\delta)$中能取到非零的有理数，这与$Z$中不同元素应属于不同的等价类矛盾．又当$m(Z)=0$时，若记$\{r_1,r_2,\cdots\}$为有理数的全体，则有$m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(Z+r_n))=0$．但是$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(Z+r_n)\supset E$，而$m^*(E)>0$，推出矛盾．

例4 设有映射$f:[a,b]\to\mathbf{R}^1$. 若对于$[a,b]$中任一可测集E，$f(E)$必为$\mathbf{R}^1$中的可测集. 证明：对于$[a,b]$中的任一零集Z，必有$m(f(Z))=0$.

证 用反证法. 设$m(f(Z))\neq 0$，则由上例知，必可取到$f(Z)$的不可测子集Q. 因$Q\subset f(Z)$，则必有$Z_1\subset Z$，使得$f(Z_1)=Q$. 因为$m(Z)=0$，所以其子集Z_1也可测，由题设$f(Z_1)$也可测，与前面假设矛盾. 故命题成立.

例5 若$T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$是线性变换，证明：$T$是连续变换.

证 若令$e_i\ (i=1,2,\cdots,n)$是$\mathbf{R}^n$中的一组基，则对$\mathbf{R}^n$中的任意$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，有$x=\xi_1e_1+\xi_ne_n$. 再令$T(e_i)=x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，又有$T(x)=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\cdots+\xi_nx_n$. 记$M=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}$，可得

$$\begin{aligned}|T(x)|&\leqslant|\xi_1||x_1|+|\xi_2||x_2|+\cdots+|\xi_n||x_n|\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{1/2}=M\cdot|x|,\end{aligned}$$

由此可得$|T(y)-T(x)|=|T(y-x)|\leqslant M|y-x|$. 即知$T$是连续变换.

例6 设E是可测集，$m(E)=1$，$\{E_n\}$是E的一列可测子集，且$\forall\ \varepsilon>0$，有$E_n\in\{E_n\}$，使$m(E_n)>1-\varepsilon$. 证明：$m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)=1$.

证 因为$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\subset E$，所以由测度的单调性，$m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)\leqslant m(E)=1$. 又$\forall\ \varepsilon>0$，取$n\in\mathbf{N}$，使$m(E_n)>1-\varepsilon$. 这样就有$m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)\geqslant m(E_n)>1-\varepsilon$. 于是，由$\varepsilon$的任意性，$m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)\geqslant 1$. 综合即得

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=1.$$

例7 设E是可测集，$m(E)=1$，$\{E_n\}$是E的一列可测子集，且$m(E_n)=1$，$n=1,2,\cdots$. 证明：$m(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n)=1$.

证 对任何$n\in\mathbf{N}$，$m(E\setminus E_n)=0$，所以$E\setminus\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E\setminus E_n)$是

一列零测集的并，故仍是零测集．由于$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=E\setminus(E\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)$，而$E\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$是零测集，所以$m(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)=m(E)=1$.

例8　设$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$是一个双射，且保持点集的外测度不变，证明：对任何可测集，$f(E)$也是可测集．

证　对$\mathbf{R}^n$中任意点集F，由于E可测，有

$$m^*(f^{-1}(F))=m^*(f^{-1}(F)\cap E)+m^*(f^{-1}(F)\setminus E).\qquad ①$$

又因为f是双射，且保持外测度不变，所以有

$$m^*(F)=m^*(f^{-1}(F)),\quad m^*(F\cap f(E))=m^*(f^{-1}(F)\cap E),$$
$$m^*(F\setminus f(E))=m^*(f^{-1}(F)\setminus E).$$

将上面三式代入①，得对任何集F有

$$m^*(F)=m^*(F\cap f(E))+m^*(F\setminus f(E)),$$

所以，$f(E)$是可测集．

例9　设$E\subset[0,1]$是可测集，且$m(E)\geqslant\varepsilon>0$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是$[0,1]$中的点，其中$n>\frac{2}{\varepsilon}$．证明：$E$中存在两个点，其距离等于$x_1,x_2,\cdots,x_n$中某两个点之间的距离．

证　由题设可知$\bigcup_{i=1}^{\infty}(E+x_i)\subset[0,2]$，有

$$\sum_{i=1}^{m}m(E+x_i)=n\cdot m(E)\geqslant n\varepsilon>2.$$

于是，必存在$i,j\ (i\neq j)$且$(E+x_i)\cap(E+x_j)\neq\varnothing$．设$Z\in(E+x_i)\cap(E+x_j)$，这样一来，$Z-x_i\in E$，$Z-x_j\in E$，而$(Z-x_i)-(Z-x_j)=x_j-x_i$，命题得证．

例10　设G是开集，E是零测集，证明：$\overline{G}=(\overline{G-E})$．

证　因为$G\supset G-E$，故$\overline{G}\supset\overline{G-E}$．又因$G$是开集，有$\overline{G}=G\cup G'=G'$．任取$x\in\overline{G}$，则在$x$的任一邻域$(\alpha-\beta)$中必有$x_0\neq x$，而$x_0\in G\cap(\alpha,\beta)$．又因$G\cap(\alpha,\beta)$为开集，必存在$x_0$的邻域$(a,b)$，使得$(a,b)\subset G\cap(\alpha,\beta)$．由于$m(E)=0$，故在$(a,b)$中必有异于$x$的点$y\in G-E$（否则，$m(E)\geqslant m(a,b)>0$）．因为$(a,b)\subset(\alpha,\beta)$，故$y\in$

(α,β)，于是

$$x\in(G-E)'\subset\overline{G-E},\quad \overline{G}\subset\overline{G-E}.$$

综上所述，知命题成立.

例 11 设 Z 是 $[0,1]$ 中的不可测集，证明：存在 ε，$0<\varepsilon<1$，使得对 $[0,1]$ 中任一满足 $m(E)\geqslant\varepsilon$ 的可测集 E，$Z\cap E$ 均是不可测的.

证 用反证法. 若对任何 ε，$0<\varepsilon<1$，存在可测集 E_ε，使 $m(E_\varepsilon)\geqslant\varepsilon$，且 $Z\cap E_\varepsilon$ 可测. 取 $\varepsilon_n=1-1/n$，则 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 1$. 记 $E_n=E_{\varepsilon_n}$，则 $m(E_n)\geqslant 1-1/n$. 由 $E_n\subset[0,1]$，可得 $m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)=1$. 又 $Z\cap E_n$ 可测，故 $Z\cap(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)$ 可测. 这时，有

$$Z=Z\cap[0,1]=(Z\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\cup(Z\cap([0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)),$$

但 $Z\cap([0,1]\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)$ 是零集 $[0,1]\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 的子集，所以仍然是零集，从而 Z 应该可测，而这与题设相矛盾.

第三章　可测函数

第一节　可测函数的定义及其性质

主要内容

1. 可测函数允许取值$\pm\infty$($+\infty$可以写做∞)，称$\mathbf{R}^1\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$为广义实数集，关于$\pm\infty$的运算规则如下：

(1)$-\infty<\infty$；若$x\in\mathbf{R}^1$，则$-\infty<x<\infty$.

(2)若$x\in\mathbf{R}^1$，则

$$x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=(\pm\infty+(\pm\infty))=\pm\infty;$$

$$x-(\mp\infty)=(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty;$$

$$\pm(\pm\infty)=\infty;\quad \pm(\mp\infty)=-\infty;$$

$$|\pm\infty|=+\infty.$$

(3)$x\in\mathbf{R}$，且$x\neq0$ 的符号函数$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

$$x\cdot(\pm\infty)=\pm(\operatorname{sgn}x)\infty,$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty)=\infty,\quad (\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty.$$

但是$(\pm\infty)-(\pm\infty)$，$(\pm\infty)+(\mp\infty)$等式无意义.

(4)规定　$0\cdot(\pm\infty)=0$.

2. 设$f(x)$是定义在可测集$E\subset\mathbf{R}^n$上的广义实值函数. 若对于任意实数t，点集$\{x\in E: f(x)>t\}$(或简写为$\{x: f(x)>t\}$)是可测集，则称$f(x)$是E上的可测函数(或称$f(x)$在E上可测).

3. 设$f(x)$是可测集E上的函数，D是$\mathbf{R}^1$中的一个稠密集. 若对任意的$r\in D$，点集$\{x: f(x)>r\}$都是可测集，则对任意的$t\in\mathbf{R}^1$，

点集$\{x:f(x)>r\}$也是可测集.

4. 若$f(x)$是E上的可测函数,则下列等式中左边的点集皆可测:

(1)$\{x:f(x)\leqslant t\}=E\setminus\{x:f(x)>t\}\quad(t\in\mathbf{R}^1)$;

(2)$\{x:f(x)\geqslant t\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\{x:f(x)>t-\frac{1}{k}\}\quad(t\in\mathbf{R}^1)$;

(3)$\{x:f(x)<t\}=E\setminus\{x:f(x)\geqslant t\}\quad(t\in\mathbf{R}^1)$;

(4)$\{x:f(x)=t\}=\{x:f(x)\geqslant t\}\cap\{x:f(x)\leqslant t\}\quad(t\in\mathbf{R}^1)$;

(5)$\{x:f(x)<\infty\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x:f(x)<k\}$;

(6)$\{x:f(x)=\infty\}=E\setminus\{x:f(x)<\infty\}$;

(7)$\{x:f(x)>-\infty\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x:f(x)>-k\}$;

(8)$\{x:f(x)=-\infty\}=E\setminus\{x:f(x)>-\infty\}$.

5. (1)若$f(x)$是定义在$E_1\cup E_2\subset\mathbf{R}^n$上的广义实函数,若$f(x)$在$E_1$和$E_2$上都可测,则$f(x)$在$E_1\cup E_2$上可测.

(2)若$f(x)$在E上可测,A是E中的可测集,则$f(x)$可看做是定义在A上的函数,在A上也可测.

6. 可测函数的运算性质.

若$f(x),g(x)$是E上的实值可测函数,则下列函数:(1)$Cf(x)$ $(C\in\mathbf{R}^1)$,(2)$f(x)+g(x)$,(3)$f(x)\cdot g(x)$都是E上的可测函数.对取广义实值的可测函数也成立.

若$\{f_k(x)\}$是E上的可测函数列,则下列函数:(1)$\sup\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}$,(2)$\inf\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}$,(3)$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)$,(4)$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)$都是$E$上的可测函数.

若$\{f_k(x)\}$是E上的可测函数列且有$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$,则$f(x)$是$E$上的可测函数.

7. 设有一个与集合$E\subset\mathbf{R}^n$中的点x有关的命题$P(x)$.若除了E中的一个零测集以外,$P(x)$皆为真,则称$P(x)$在E上几乎处处是真的,并简记做$P(x)$,a.e.(于E).

8. 设$f(x),g(x)$是定义在$E\subset\mathbf{R}^n$上的广义实值函数,$f(x)$是

E 上的可测函数. 若 $f(x)=g(x)$, a. e. ,则 $g(x)$ 在 E 上可测.

9. 设 $f(x)$ 是定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的实值函数,若 $\{y:y=f(x), x\in E\}$ 是有限集,则称 $f(x)$ 是 E 上的简单函数.

10. 简单函数逼近定理.

(1)若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数,则存在非负可测的简单函数渐升列: $\varphi_k(x)\leqslant\varphi_{k+1}(x)$, $k=1,2,\cdots$,使得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\quad x\in E;$$

(2)若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数,则存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$,使得 $|\varphi_k(x)|\leqslant|f(x)|$,且有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\quad x\in E.$$

若 $f(x)$ 还是有界的,则上述收敛是一致的.

11. 对于定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的函数 $f(x)$,称点集 $\{x:f(x)\neq0\}$ 的闭包为 $f(x)$ 的支集,记为 $\mathrm{supp}(f)$. 若 $f(x)$ 的支集是有界的(即支集是紧集),则称 $f(x)$ 是具有紧支集的函数.

12. 简单函数逼近定理中的可测简单函数列中的每一个均可取成具有紧支集的函数.

13. 若 f 是定义在可测集 E 上的有限实值函数,且 f 是可测函数,则对任何实数 a,b,集 $\{x:a\leqslant f(x)\leqslant b\}$ 是可测集.

14. 设 M 是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 的一个子集,

$$\chi_M(x)=\begin{cases}1, & x\in M,\\ 0, & x\in E\setminus M,\end{cases}$$

则称 χ_M 是集合 M 的特征函数. 集合 M 与其特征函数 χ_M 同为可测或者同为不可测的.

15. 设 f 与 g 都是 E 上的可测函数,则 $\{x:f(x)>g(x)\}$ 是可测集.

16. 设 f,g 都是 E 上的可测函数,则 $\max\{f,g\}$, $\min(f,g)$ 以及 $|f|$ 也是 E 上的可测函数.

上述结论可以推广到有限个函数的情形.

疑难解析

1. 如何理解可测函数？

答 设$f(x)$是定义在可测集E上的实值函数，如果E可以分解为有限个互不相交的可测子集之并，即$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i, E_i\cap E_j=\varnothing$ $(i\neq j)$，使在每个E_i上$f(x)$都是常数，则称$f(x)$是E上的简单函数. 任何两个简单函数的和与积仍是简单函数，但一列简单函数的极限函数不是简单函数.

若$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$是可测集$E$上的一列非负简单函数，且$\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\cdots$，则称极限函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$为$E$上的非负可测函数. 可测集$E$上非负函数$f(x)$非负可测的充要条件是：对于任意实数$a$，点集$\{x:f(x)>a\}$是可测集.

对可测集E上任意函数$f(x)$，令

$$f^+(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当}x\text{使}f(x)>0\text{时},\\ 0, & \text{当}x\text{使}f(x)<0\text{时},\end{cases}$$

$$f^-(x)=\begin{cases}-f(x), & \text{当}x\text{使}f(x)<0\text{时},\\ 0, & \text{当}x\text{使}f(x)>0\text{时}.\end{cases}$$

$f^+(x),f^-(x)$都是非负函数，且$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$.

当$f^+(x),f^-(x)$都是E上非负可测函数时，$f(x)$称为E上的可测函数. 可测集E上的函数$f(x)$可测的充要条件是：对任意实数t，集合$\{x:f(x)>t\}$恒可测.

这里所讲的可测函数就是勒贝格可测函数.

在测度论中，除了勒贝格可测函数，还有其他可测函数，如波雷尔可测函数（假设f是定义于E上的实函数，如果对于任何实数t，集合$\{x:f(x)>t\}$都是波雷尔集）. 由于本书主要讨论勒贝格可测函数，故就称其为可测函数.

2. 怎样理解“几乎处处”的概念？

答 “几乎处处”是测度和积分理论中一个重要的概念.

设E是$\mathbf{R}^n$中的一个点集，P是与E中的点有关的一个命题. 若存在一个测度为零的集E_0，当$x\in(E\setminus E_0)$时，命题P在x处必成立，则称命题P在E上几乎处处成立，也称命题P在E上a.e.成立.

由上面的论点我们认识到：所谓命题P在点集E上"几乎处处"成立，就是E中使命题不成立的点总是包含在某个测度为零的集合中.

应该注意的是，E并不一定是可测集，E_0也不要求被包含在E中. 但是为叙述方便起见，可以认为有$E_0\subset E$，因为在一般情况下，总可以用$E\cap E_0$代替E_0.

常用的"几乎处处"有：几乎处处相等，几乎处处收敛，几乎处处有限，几乎处处成立等.

方法、技巧与典型例题分析

要证明一个函数为可测函数，可以从可测函数的定义，以及函数可测的充要条件与等价命题着手，进行分析论证. 由定义在E上的可测函数来讨论集合的可测性，其主要依据是等价命题和充要条件，但要注意推理的正确性与严密性.

例1 说明下列函数是可测函数：

(1)可测集E上的常值函数f；

(2)区间$[a,b]$上的单调函数f；

(3)可测集E上的连续函数f；

(4)定义在勒贝格测度为零的集上的函数f.

解 (1)当f是常值函数时，对任意实数t，集合$\{x\in E:f(x)>t\}$或者是E，或者是空集，从而必是可测集. 依定义f是可测函数.

(2)对$E=[a,b]$，当f是单调函数，t是有限实数时，$\{x\in E:f(x)>t\}$一定是$[a,b]$的某个子区间或空集，故是可测集，所以f是可测函数.

(3)设t是任意实数，$x_0\in\{x\in E:f(x)>t\}$，即$x_0\in E$且

$f(x_0)\in(t,+\infty)$. 由 f 的连续性知,存在 x_0 的邻域 $N(x_0,\delta)$,使得 $x\in E\cap N(x_0,\delta)$时,$f(x)\in(t,+\infty)$,即 $E\cap N(x_0,\delta)\subset\{x\in E:f(x)>t\}$.

考察当 x_0 在 $\{x\in E:f(x)>t\}$ 中变动时满足上述关系的 $N(x_0,\delta)$全体,并作它们的并集

$$Q=\bigcup\{N(x,\delta):x\in E,E\cap N(x,\delta)\}\subset\{x\in E:f(x)>t\}.$$

由于Q是一族开集的并集,故Q是开集,所以是可测集. 又由Q的构成知,$\{x\in E:f(x)>t\}=Q\cap E$,即$\{x\in E:f(x)>t\}$是两个可测集的交,故是可测集,从而得$f$是可测函数.

(4)零测集的任何子集仍是零测集,因而是可测集,从而f是可测函数.

本例是用定义来判断f是可测函数,需确定$\{x\in E:f(x)>t\}$是可测集,要利用上一章中判定点集为可测的知识讨论.

例2 设f是定义在可测集E上的实值函数,证明下列任一条件都是f在E上可测的充要条件:

(1)对任何有限实数t,$\{x\in E:f(x)\geqslant t\}$可测;

(2)对任何有限实数t,$\{x\in E:f(x)<t\}$可测;

(3)对任何有限实数t,$\{x\in E:f(x)\geqslant t\}$可测;

(4)限制f是有限实值函数时,对任何有限实数t_1,t_2,$\{x\in E:t_1\leqslant f(x)<t_2\}$可测.

证 只要由f是可测函数能推出(1),由(1)推出(2),(2)推出(3),(3)推出f可测就可以了. (4)可借助可测集的差集与并集证出.

为了书写简便,下面将$\{x\in E:f(x)>t\}$记做$\{x:f>t\}$.

对任何实数t,因为$\{x:f\geqslant t\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x:f>t-1/n\}$,而每一$\{x:f>t-1/n\}$都可测,所以$\{x:f\geqslant t\}$是可测集,即由$f$可知(1)成立.

若f满足(1),则由$\{x:f<t\}=E\setminus\{x:f\geqslant t\}$,从而差集$\{x:f<$

$t\}$是可测集.

若f满足(2),因为$\{x:f\leqslant t\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x:f<t+1/n\}$,由(2),每一$\{x:f<t+1/n\}$都可测,从而$\{x:f\leqslant t\}$是可测集. 由于$\{x:f>t\}=E\setminus\{x:f\leqslant t\}$,故由(3)可测得$\{x:f>t\}$可测,依定义,$f$是可测函数.

下证(4)的情形. 若f可测,因为$\{x:t_1\leqslant f<t_2\}=\{x:f\geqslant t_1\}\setminus\{x:f\leqslant t_2\}$,而等式右边两个集均可测,故$\{x:t_1\leqslant f<t_2\}$是可测集. 反之,若$f$满足(4)且为有界实值函数,则$\{x:f\geqslant t_1\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{t_1\leqslant f<t_1+n\}$,而每一$\{x:t_1\leqslant f<t_1+n\}$均可测,故$\{x:f\geqslant t_1\}$可测,由(1)知,$f$为可测函数.

例3 设$f^2(x)$是$\mathbf{R}^n$上的可测函数,且点集$\{x:f(x)>0\}$是可测集,证明:$f(x)$是可测函数.

证 因为f^2是可测函数,故对任何实数t

$$\{x:f>t\}=\begin{cases}\{x:f>0\}\cap\{x:f^2>t^2\}, & t>0,\\ \{x:f>0\}, & t=0,\\ \{x:f>0\}\cup\{x:f^2<t^2\}, & t<0.\end{cases}$$

所以$\{x:f>t\}$是可测集,f是E上的可测函数.

例4 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理点},\\ 0, & x\text{ 为无理点}.\end{cases}\quad (x\in[0,1])$$

证明:$D(x)$是可测函数.

证 因为$[0,1]$上有理点的全体是零测集,所以$D(x)=0$, a. e. $x\in[0,1]$. 而$[0,1]$上恒等于零的函数是可测的,则狄利克雷函数$D(x)$是可测的.

例5 设$f(x)$是E上的可测函数,$\varphi(y)$是其值域上的单调函数,则$\varphi(f(x))$也是E上的可测函数.

证 不妨设$\varphi(y)$是单调不减的,对任意实数t,设

$$s=\inf\{y:\varphi(y)\geqslant t\}.$$

若 $s\in\{y:\varphi(y)\geqslant t\}$，则 $\{x:\varphi(f(x))\geqslant t\}=\{x:f(x)\geqslant s\}$；若 $s\overline{\in}\{y:\varphi(y)\geqslant t\}$，则 $\{x:\varphi(f(x))\geqslant t\}=\{x:f(x)>s\}$. 由 $f(x)$ 是 E 上可测函数知，上面两个等式右边均为可测集，故其左边亦为可测集. 由 t 的任意性知，$\varphi(f(x))$ 是 E 上的可测函数.

例 6 设 $f(x)$ 是可测集 E 上几乎处处有限的函数，若 $\forall\ \varepsilon>0$，有连续函数 $\varphi(x)$，使 $m\{x:f(x)\neq\varphi(x)\}<\varepsilon$，证明：$f(x)$ 为 E 上的可测函数.

证 需证对任意实数 t，$\{x:f(x)>t\}$ 为可测集. 对于 $\varepsilon_n=1/n$，有连续函数 $\varphi_n(x)$（设 $E_n=\{x:f(x)\neq\varphi_n(x)\}$），使得 $m(E_n)=m\{x:f(x)\neq\varphi(x)\}<1/n$. 令 $M=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E\backslash E_n)$，且 $N=E\backslash M$，则

$$m(N)=m(E\backslash M)=m(E\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\backslash E_n))=m(\bigcap_{n=1}^{\infty}E\backslash(E\backslash E_n))$$
$$=m(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)\leqslant m(E_n)<1/n.$$

上式对任意的 n 都成立，又 $m(N)\geqslant 0$，所以 $m(N)=0$，即 N 为零测集. 从而对任意实数 t，$\{x:f(x)>t\}$ 必为可测集，于是 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

例 7 E 上的可测函数 $f(x)$ 在 E 的任意可测子集上也是可测函数.

证 设 E_1 是 E 的任意可测子集，则对任意实数 t，有

$$\{x:x\in E_1,f(x)\geqslant t\}=E_1\cap\{x:f(x)\geqslant t\}.$$

等式右边的两个集合均可测，故 $\{x:x\in E_1,f(x)\geqslant t\}$ 也可测，所以 $f(x)$ 是 E_1 上的可测函数.

例 8 设 f 与 g 都是 E 上的可测函数，证明：$\{x\in E:f>g\}$ 是可测集.

证 设 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$ 为有理数，为证 $\{x\in E:f>g\}$ 是可测集，先证

$$\{x:f>g\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\{x:f>r_n\}\cap\{x:g<r_n\}\}.$$

设 $x_0\in\{x:f>g\}$，即 $f(x_0)>g(x_0)$，故必存在有理数 r，使得

$f(x_0)>r>g(x_0)$，即 $x_0\in\{x:f>r\}\cap\{x:g<r\}$. 从而

$$\{x:f>g\}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\{x:f>r_n\}\cap\{x:g<r_n\}\},\qquad ①$$

反过来，若 $x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\{x:f>r_n\}\cap\{x:g<r_n\}\}$，必存在某个 i，使得 $x_0\in\{x:f>r_i\}\cap\{x:g<r_i\}$，即有 $f(x_0)>r_i>g(x_0)$，故 $x_0\in\{x:f>g\}$，从而

$$\{x:f>g\}\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\{x:f>r_n\}\cap\{x:g<r_n\}\}.\qquad ②$$

将式①、式②综合起来，即得所证命题.

例 9 设 $\{E_i\}$ 是一列可测集，$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$. 证明：$f$ 在 E 上可测的充要条件是 f 在每个 E_i 上可测.

证 必要性. 若 f 在 E 上可测，则对任何自然数 i 及任何实数 t，$\{x\in E_i:f\leqslant t\}=\{x\in E:f\leqslant t\}\cap E_i$ 是可测集，所以 f 在 E_i 上可测.

充分性. 若 f 在每个 E_i 上可测，则对任何实数 t，$\{x:f\leqslant t\}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{x\in E_i:f\leqslant t\}$，所以 f 在 E 上可测.

例 10 设 f 是 $[a,b]$ 上的可微函数，证明：f' 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

证 补充定义 $f(x)=f(b)$，$x\in[b,\infty)$. 令

$$F_n(x)=n[f(x+1/n)-f(x)],\quad n=1,2,\cdots$$

因为 f 连续，故可测，于是 $\{F_n\}$ 是一列可测函数. 又对 $x\in[a,b]$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=f'(x)$，因而 f' 是一列可测函数的极限，也是可测函数.

例 11 设 f 是 E 上的可测函数，h 是直线上的波雷尔可测函数，证明：复合函数 $h\circ f$ 是 E 上的可测函数.

证 设 t 是任一有限实数. 若证得 $\{x:h\circ f>t\}$ 是勒贝格可测集，则命题成立. 因为

$$\{x:h\circ f>t\}=(h\circ f)^{-1}((t,\infty))=f^{-1}(h^{-1}((t,\infty))),$$

由于 h 是波雷尔可测函数，所以 $h^{-1}((t,\infty))$ 是波雷尔集. 由例 18

结果与 f 的可测性知，$f^{-1}(h^{-1}((t,\infty)))$ 是勒贝格可测集，故 $h\circ f$ 是 E 上的可测函数.

例 12 设 f 是 E 上几乎处处有限的可测函数，$m(E)<\infty$，证明：$\forall\ \varepsilon>0$，存在 E 上的有界可测函数 g，使得 $m(\{x:f\neq g\})<\varepsilon$.

证 由题设知，$E\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x:-n<f<n\}$ 是零集，又 $m(E)<\infty$. 取 $N\in\mathbf{N}$，使得 $m(E)-m(\{x:-N<f<N\})<\varepsilon$. 令

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & -N<f(x)<N,\\ 0, & |f(x)|\geqslant N,\end{cases}$$

则 g 即为 E 上的有界可测函数，且

$$m(\{x:f\neq g\})\leqslant m(E\setminus\{x:-N<f<N\})<\varepsilon.$$

例13 设 $f_1(x)$ 是 $E_1\subset\mathbf{R}^p$ 上的可测函数，$f_2(y)$ 是 $E_2\subset\mathbf{R}^q$ 上的可测函数，证明：$f_1(x)f_2(y)$ 是 $E_1\times E_2$ 上的可测函数.

证 由题设知，E_1 和 E_2 分别是 $\mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集，从而 $E_1\times E_2$ 是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的可测集. 由逼近定理知存在简单函数列 $\{\varphi'_n(x)\}$ 和 $\{\varphi''_n(y)\}$，使得

在 E_1 上，$\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\varphi'_n(x)=f_1(x)$，

在 E_2 上，$\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\varphi''_n(y)=f_2(y)$.

令 $\varphi'_n(x,y)\equiv\varphi'_n(x)$，$\varphi''_n(x,y)\equiv\varphi''_n(y)$，则 $\varphi'_n(x,y)$ 与 $\varphi''_n(x,y)$ 是 $E_1\times E_2$ 上的简单函数，$\varphi'_n(x,y)\cdot\varphi''_n(x,y)\equiv\varphi'_n(x)\varphi''_n(y)$ 也是 $E_1\times E_2$ 上的简单函数，且

$$\lim_{n\to\infty}\varphi'_n(x,y)\varphi''_n(x,y)=\lim_{n\to\infty}\varphi'_n(x)\varphi''_n(y)=f_1(x)f_2(y).$$

故依简单函数逼近定理，$f_1(x)f_2(y)$ 是 $E_1\times E_2$ 上的可测函数.

例 14 设 $\{r_n\}$ 为全体有理数作成的数列. 若可测集 E 上的函数 $f(x)$ 对于所有的 r_n，$\{x:f(x)\geqslant r_n\}$ 均可测，证明：$f(x)$ 是 E 上的可测函数.

证 对任意实数 t，有 $\{x:f(x)>t\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x:f(x)\geqslant r_n>t\}$. 因为，若 $x_0\in E$，则 $f(x_0)>t$，故必有 $f(x_0)\geqslant r_n>t$，即 $x_0\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x:f(x)$

$\geqslant r_n > t\}$；反过来，若 $x_0 \in$ 等式右边，则必定有 $f(x_0) \geqslant r_{n_0} > t$，即 $f(x_0) > t$，于是 $x_0 \in \{x: f(x) > t\}$.

而等式右边是可列个可测集之并，故 $\{x: f(x) > t\}$ 对任意实数 t 可测，从而 $f(x)$ 在 E 上可测.

例 15 设 $f(x), g(x)$ 是 $(0,1)$ 上的可测函数，且对任意的 $t \in \mathbf{R}^1$ 有：$m(\{x: f(x) \geqslant t\}) = m(\{x: g(x) \geqslant t\})$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是单调减少且左连续的函数，证明：$f(x) = g(x)\ (0 < x < 1)$.

证 用反证法. 若存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $f(x_0) \neq g(x_0)$，不妨设 $t = f(x_0) > g(x_0)$，则 $x_0 \in \{x: f(x) \geqslant t\}$，且有 $m(\{x: f(x) \geqslant t\}) \geqslant x_0 > 0$，假定 $\{x: g(x) \geqslant t\}$ 的最大点是 x_1，则 $g(x_1) \geqslant t > g(x_0)$，故依单调性有 $x_1 < x_0$，由此得

$$m(\{x: g(x) \geqslant t\}) < m(\{x: f(x) \geqslant t\}),$$

与题设矛盾.

例 16 举例说明下列命题：

(1)若 $|f(x)|$ 是 E 上可测函数，则 $f(x)$ 不一定是 E 上可测函数；

(2)若 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续函数，则对于 $[0,1]$ 的可测子集 A 和 f 值域中的可测集 B，$f(A)$ 与 $f^{-1}(B)$ 均不一定是可测集.

解 (1)设 E 是 $[0,1]$ 中的一个不可测集，令

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in E, \\ -x, & x \overline{\in} E. \end{cases}$$

因为 $|f(x)| = x$，显然是 $[0,1]$ 上的可测函数. 但是在 $[0,1]$ 上，$\{x: f(x) \geqslant 0\} = E$，由于 E 是不可测集，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可测.

(2)用 $\{I_c^{(n)}\}$ 表示康托尔集 C 的有限余区间集，定义 $[0,1]$ 上函数 φ 如下：

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in (1/3, 2/3), \\ 1/4, & x \in (1/9, 2/9), \\ 3/4, & x \in (7/9, 8/9), \\ \quad \vdots \end{cases}$$

一般，当$x\in I_c^{(n)}$时，$\varphi(x)=\dfrac{2x-1}{2^n}$. 当$x\in C$时规定

$$\varphi(x)=\sup\{\varphi(\xi):\xi\leqslant x,\xi\in[0,1]\setminus C\},\quad \varphi(0)=0.$$

显然，φ是$[0,1]$上单调增加的连续函数. 再作$\psi(x)=x+\varphi(x)$，则ψ是$[0,1]$上严格单调增加的连续函数. 在康托尔集的各有限余区间上，φ分别取常值，故这些余区间经ψ映射后长度不变. 故若记$I=[0,1]$，可得

$$m(\psi(E\setminus C))=m(I\setminus C)=1,$$

但是$\psi(I)=[0,2]$，故$m(\psi(C))=1$.

取D为$\psi(C)$的不可测子集，$A=\psi^{-1}(D)\subset C$，所以A是可测集. 取$f=\psi$，则$f(A)=D$是不可测的.

若取$f(x)=\psi^{-1}(2x)$，则f在$[0,1]$上连续. 取f值域中的可测集$B=A$，则有$f^{-1}(B)=\{x/2:x\in D\}$. 由于D是不可测集，所以$f^{-1}(B)$也是不可测集.

若根据上述两个f的构造，在$[0,1]$中分段定义一个f，就可得到一个同时满足两个要求的函数f.

例 17 设$\chi(x)$为有理数所成之集的特征函数，证明：$\chi(x)$同任意函数的相乘积为一可测函数.

证 设$f(x)$是任意函数，则积$\chi(x)f(x)$几乎处处等于零，因此函数$\chi(x)f(x)$与恒等于零的函数（是一可测函数）等价. 故函数$\chi(x)f(x)$可测.

例 18 设f是E上的可测函数，M是波雷尔集，证明：

$$f^{-1}(M)=\{x:x\in E,f(x)\in M\}$$

是E的勒贝格子集.

证 因为波雷尔集是由开集全体生成的σ-代数，即包含所有开集的最小σ-代数，故当M为直线上的开集时，必有$M=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$，其中$(\alpha_n,\beta_n)$是$M$的构成区间. 于是有

$$f^{-1}(M)=f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}((\alpha_n,\beta_n)),$$

因为 f 是勒贝格可测函数，故 $f^{-1}((\alpha_n,\beta_n))=E(f<\beta_n)\setminus E(f\leqslant\alpha_n)$ 是勒贝格可测集，从而 $f^{-1}(M)$ 是勒贝格可测集.

记 $\mathbb{E}=\{M:f^{-1}(M)$ 是勒贝格可测集$\}$，则因为对任何一列 $\{M_i\}$，均有

$$f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty}M_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(M_i),$$
$$f^{-1}(M_1\setminus M_2)=f^{-1}(M_1)\setminus f^{-1}(M_2),$$

且 $f^{-1}(-\infty,\infty)=E$，所以 $\mathbb{E}$ 是一个 σ 代数. 结合前面已证任何开集均属于 E，故 $\mathbb{E}$ 包含一切波雷尔集.

例 19 证明：f 是 E 上可测函数的充要条件为对一切有理数 r，$\{x:f(x)\geqslant r\}$ 是可测集.

证 **必要性** 若 f 在 E 上可测，则对任何有理数 r，显然 $\{x:f\geqslant r\}$ 是可测集.

充分性 若对任何有理数 r，$\{x:f\geqslant r\}$ 是可测集，则对任何实数 t，取一列有理数 r_i，使得 $r_i\leqslant t$ 且 $r_i\to t$. 于是，由 $\{x:f\geqslant t\}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\{x:f\geqslant r_i\}$ 知，$\{x:f\geqslant t\}$ 是可测集，f 是可测函数.

例 20 设 $\{f_n\}$ 是 E 上的可测函数列，证明：$\{f_n\}$ 的收敛点集与发散点集都是可测集.

证 因为发散点集是收敛点集的余集，所以只需证收敛点集是可测集. 而 $\{f_n\}$ 的收敛点集为

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}\{x:\text{存在 }N,\text{当 }n,m\geqslant N\text{ 时},|f_n(x)-f_m(x)|<1/i\}$$
$$=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\{x:\text{当 }n,m\geqslant N\text{ 时},|f_n(x)-f_m(x)|<1/i\}$$
$$=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n,m=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)-f_m(x)|<1/i\},$$

而每个 $\{x:|f_n(x)-f_m(x)|<1/i\}$ 是可测集，所以经过可列次集合运算后得到的 $\{f_n\}$ 的收敛点集是可测集.

例21 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，G 为开集，F 为闭集，试问：$\{x:f(x)\in G\}$ 与 $\{x:f(x)\in F\}$ 是否可测？

解 设$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$,其中$(\alpha_n,\beta_n)$是$G$的构成区间,则

$$\{x:f\in G\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\{x:f>\alpha_n\}\cap\{x:f<\beta_n\}).$$

因为$f(x)$在E上可测,对一切n,$\{x:f>\alpha_n\}\cap\{x:f<\beta_n\}$必为可测集,所以其可列个并也是可测集,从而$\{x:f(x)\in G\}$是可测集.

若令$G_o=F^C$,则由F是闭集知G_o是开集,从而$\{x:f\in G_o\}$是可测集. 而$\{x:f\in F\}=E-\{x:f\in G_o\}$,故$\{x:f\in F\}$是可测集.

例22 设f是$[0,1]$上几乎处处有测的可测函数,证明:存在惟一的$t_0\in\mathbf{R}^1$,使得

$$m(\{x:f\geqslant t_0\})\geqslant 1/2,\quad m(\{x:f\geqslant t\})<1/2.$$

其中t是大于t_0的任何实数.

证 令$F(x)=m(\{u:f(u)\geqslant x\})$,则可直接验证得知,$F(-\infty)=1$,$F(\infty)=0$,$F(x)$单调减少,$F(x)$左连续. 事实上,在$x>x_1$时,有关系

$$\{u:f(u)\geqslant x_1\}\setminus\{u:f(u)\geqslant x\}=\{u:x>f(u)\geqslant x_1\},$$

极限$\bigcap_{x>x_1}\{u:x>f(u)\geqslant x_1\}=\varnothing$. 所以,当$x>x_1$,$x_1\to x$时,$F(x_1)\to F(x)$.

显然,$\{x:F(x)\geqslant 1/2\}$是非空有界集. 记$t_0=\sup\{x:F(x)\geqslant 1/2\}$,因为$F$左连续,所以$t_0\in\{x:F(x)\geqslant 1/2\}$,即$m(\{x:f(x)\geqslant t_0\})\geqslant 1/2$. 由上确界的定义,对任何$t>t_0$,必有$m(\{x:f(x)\geqslant t\})\geqslant 1/2$. 而由$t_0$同时满足的两个条件可知,$t_0$是惟一的.

例23 设f是E上的非负可测函数,则f总可以表示成一列单调增加的简单函数的极限,即存在一列简单函数$\{\varphi_n\}$,$\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots$,使$f(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$对一切$x\in E$成立.

证 对任意的$n\in\mathbf{N}$,将$[0,n]$进行$n\cdot 2^n$等分,

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}k/2^n, & x\in\{x:k/2^n\leqslant f<(k+1)/2^n\},\\ n, & x\in\{x,f\geqslant n\}.\end{cases}$$

其中$k=0,1,\cdots,2^n-1$. 则φ_n为简单函数,且有$\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots$.

对 $f(x_0)=\infty$，有 $\varphi(x_0)=n\to\infty=f(x_0)$；

对 $f(x_0)<\infty$，有 $n\in\mathbf{N}$，使 $f(x_0)<N$，从而当 $n\geqslant N$ 时，$|f(x_0)-\varphi_n(x_0)|<1/2^n$，所以，当 $n\to\infty$时，有 $\varphi_n(x_0)\to f(x_0)$.

故命题成立.

例 24 设 $f(x)$是(a,b)上的实值函数，证明：

$$\overline{D}f(x)=\overline{\lim_{y\to x}}\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\quad \underline{D}f(x)=\underline{\lim_{y\to x}}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

是(a,b)上的可测函数.

证 只证$\overline{D}f(x)$，类似可证$\underline{D}f(x)$. 考察点集

$$D=\{x\in(a,b):\overline{D}f(x)>t\},\quad t\in\mathbf{R}^1.$$

设$\forall\ m,n\in\mathbf{N}$，$\exists\ [x_1,x_2]\subset(a,b)$，使得

$$|x_2-x_1|<\frac{1}{m},\quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>t+\frac{1}{n}.$$

记一切这样的区间的并集为$E_{m,n}$，则

$$E\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}E_{m,n}=D.$$

(1)若$x\in D$，则存在n_0，$\overline{D}f(x)>t+1/n_0$，故对每个m，存在$y\in(a,b)$，使得

$$0<|y-x|<\frac{1}{m},\quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x}>t+\frac{1}{n_0}.$$

即对一切 m，$x\in E_{m,n_0}$，亦即 $x\in E$.

(2)若 $x\in E$，则存在 n_0，使得 $x\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}E_{m,n_0}$，即对每个 m，存在$[x_1,x_2]$，当 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 时，有

$$|x_2-x_1|<\frac{1}{m},\quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>t+\frac{1}{n_0},$$

即 $$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}>t+\frac{1}{n_0}\quad 或\quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}>t+\frac{1}{n_0}.$$

也就是存在 $y\in(a,b)$，使得

$$0<|y-x|<1/n,\quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x}>t+\frac{1}{n_0}.$$

从而知$\overline{D}f(x)>t,x\in D$.

第二节　可测函数列的收敛

主要内容

1. 设$f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$是定义在点集$E\subset\mathbf{R}^n$上的广义实值函数．若存在$E$中的点集$Z$，有$m(Z)=0$及

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\quad x\in E\setminus Z,$$

则称$\{f_k(x)\}$在E上几乎处处收敛于$f(x)$，简记做$f_k\to f$,a. e..

2. 若$f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$是$E$上几乎处处有限的可测函数，且$m(E)<\infty$．若$f_k\to f$,a. e. ,则$\forall\ \varepsilon>0$，令

$$E_k(\varepsilon)=\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon\},$$

有$\lim\limits_{j\to\infty}m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k(\varepsilon))=0$.

3. 叶果洛夫(Егоров)定理　设$f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$是$E$上几乎处处有限的可测函数，且$m(E)<\infty$. 若$f_k(x)\to f(x)$,a. e. ,则$\forall\ \varepsilon>0$，存在$E$中子集$E_\delta$，$m(E_\delta)\leqslant\delta$，使得$\{f_k(x)\}$在$E\setminus E_\delta$上一致收敛于$f(x)$.

4. 设$f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$是$E$上几乎处处收敛的可测函数，若$\forall\ \varepsilon>0$，有

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0,$$

则称$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$，记做$f_n\Rightarrow f$.

特别地，$m(\{x:|f_k(x)|=\infty\})=0,\ k=1,2,\cdots$.

5. 若$\{f_k(x)\}$在E上同时依测度收敛于$f(x)$与$g(x)$，则$f(x)$与$g(x)$是对等的.

6. 勒贝格定理　设$\{f_k(x)\}$是E上几乎处处有限的可测函数列，且$m(E)<\infty$. 若$\{f_k(x)\}$几乎处处收敛于几乎处处有限的函数$f(x)$，则$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$.

7. 设$f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$是$E$上几乎处处有限的可测函数. 若对任给的$\delta>0$,存在$E_\delta\subset E$且$m(E_\delta)<\delta$,使得$\{f_k(x)\}$在$E\setminus E_\delta$上一致收敛于$f(x)$,则$\{f_k(x)\}$在$E$上依测度收敛于$f(x)$.

8. 设$\{f_k(x)\}$是E上几乎处处有限的可测函数列,若$\forall\ \varepsilon>0$,有$\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ j\to\infty}} m(\{x:|f_k(x)-f_j(x)|>\varepsilon\})=0$,则称$\{f_k(x)\}$是$E$上的依测度基本列.

9. 若$\{f_k(x)\}$是E上的依测度基本列(也称柯西列),则在E上存在几乎处处有限的可测函数$f(x)$,使得$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$.

10. 黎斯(F. Riesz)定理　若$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$,则存在子列$\{f_{k_l}(x)\}$,使得

$$\lim_{l\to\infty} f_{k_l}(x)=f(x),\text{a. e.}.$$

疑难解析

1. 几乎处处收敛与一致收敛有何关系?

答　在数学分析中,函数列的一致收敛概念是读者熟悉的. 在一致收敛的情形,某些极限运算可以交换次序. 一般地,一致收敛强于处处收敛,更强于几乎处处收敛.

例如,定义在$[0,1]$上的函数列$\{f_n\}$,$f_n(x)=x^n$,$n=1,2,\cdots$. $\{f_n\}$在$[0,1]$上处处收敛,却不一致收敛. 但是,若去掉包含右端点1的一个小邻域,即取$\delta(0<\delta<1)$,将f_n限制在$[0,1-\delta]$上,则可以证明序列$\{f_n\}$在$[0,1-\delta]$上是一致收敛的.

叶果洛夫定理指出,满足定理条件的几乎处处收敛的可测函数列,在去掉一个测度任意小的点集后是一致收敛的. 因此定理在许多场合为处理极限交换问题提供了依据.

在叶果洛夫定理中,条件$m(E)<\infty$很重要,不能去掉. 例如,可测函数列

$$f_n(x)=\chi_{(0,n)}(x),\quad n=1,2,\cdots,\quad x\in(0,\infty)$$

在$(0,\infty)$上处处收敛于$f(x)\equiv1$，但在$(0,\infty)$中的任一有限测度集外均不一致收敛于$f(x)\equiv1$.

2. 说明依测度收敛与处处收敛或几乎处处收敛的区别与联系.

答 从定义来看，处处收敛与几乎处处收敛强调的是在点上函数值的收敛(几乎处处除一个零测集外)，而依测度收敛的要点在于点集$\{x:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}$的测度应随$k$趋于无穷而趋于零，而不论此点集的位置状态如何.

它们的区别在于对任何一个固定的$\varepsilon>0$，$\{f_n\}$处处收敛于f的特点是：(1)对每个$x_0\in E$，总有一个指标$n(x_0)$，对于$n>n(x_0)$，$|f_n(x_0)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon$，即$x_0\in\bigcap\limits_{n=n(x_0)}^{\infty}\{x:|f_n-f|\leqslant\varepsilon\}$；(2)对于每个指标$n$，使得$|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon$的点全体可能有较大的测度(甚至无限大).

而依测度收敛恰好相反，有以下特点：(1)$\{x:|f_n-f|>\varepsilon\}$的测度一定随$n$趋于无限大而趋于零；(2)对于每个$x_0$来说，不一定存在$n(x_0)$，使得$x_0\in\bigcap\limits_{n=n(x_0)}^{\infty}\{x:|f_n-f|\leqslant\varepsilon\}$，甚至可能对任何指标$n$，$\bigcap\limits_{i=n}^{\infty}\{x:|f_i-f|\leqslant\varepsilon\}$始终是空集.

依测度收敛与几乎处处收敛的联系反映在勒贝格定理和黎斯定理上. 勒贝格定理指出，在“$m(E)<\infty$”的前提下，依测度收敛弱于几乎处处收敛；而黎斯定理指出，在E上依测度收敛的基本列中一定可以抽出一个几乎处处收敛的子列. 所以，尽管依测度收敛与几乎处处收敛的差别很大，但还是存在着密切的联系.

方法、技巧与典型例题分析

证明函数列的一致收敛和依测度收敛需要应用叶果洛夫定理、勒贝格定理和黎斯定理来进行，在证明这些命题时与证明这些

定理一样要采用点集分析的方法，即根据函数取值范围对其定义域进行分解，然后通过集合关系的分析对函数或函数列进行讨论．其技巧表现为选取出恰当的集合或构造合适的函数（函数列），请读者通过例题认真领会并应用于解题中．

例1 设$\{f_n\}$是E上一列可测函数，f是E上几乎处处有限的函数．如果对任何$\delta>0$，存在可测集$E_\delta\subset E$，使得$m(E\setminus E_\delta)<\delta$，$\{f_n\}$在$E_\delta$上一致收敛于$f$．证明：$\{f_n\}$在$E$上几乎处处收敛于$f$．

证 这是叶果洛夫定理的逆定理，它指出叶果洛夫定理关于函数列几乎处处收敛的条件不仅是必要的，而且是充分的．

任取一列正数δ_k，使$\delta_k\to 0$．对每个k，存在可测集$E_k\subset E$且$m(E_k)<\delta_k$，$\{f_n\}$在$E\setminus E_k$上一致收敛于f．因为$m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)\leqslant m(E_k)<\delta_k$，所以$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k$是零集．由于

$$E\setminus\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E\setminus E_k),$$

故$x_0\in E\setminus\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k$时，必存在某$k_0$，使$x_0\in E\setminus E_{k_0}$，而在$E\setminus E_{k_0}$上，$\{f_n\}$一致收敛于$f$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0)$．由$x_0$的任意性知，命题成立．

例2 设E是测度有限的可测集，$\{f_n\}$是E上一列可测函数，而且$f_n\to\infty_{\text{,a.e.}}$，证明：对任何$\delta>0$，必定存在$E$的可测子集$E_\delta$，使$m(E\setminus E_\delta)<\sigma$，且$\{f_n\}$在$E_\delta$上均匀地发散于$\infty$，即对任何数$M>0$，必存在$N\in\mathbf{N}$，使得当$n>N$时，对一切$x\in E_\delta$，有$|f_n(x)|\geqslant M$．

证 定义$g_n(x)=\begin{cases}1/f_n(x), & f_n(x)\neq 0,\\ 1, & f_n(x)=0.\end{cases}$

则因为$f_n\to\infty$，a. e.，所以$g_n\to 0$，a. e.．依叶果洛夫定理，对任何$\delta>0$，必存在E的可测子集E_δ，使$m(E\setminus E_\delta)<\delta$，且$\{g_n\}$在$E_\delta$上一致趋于零．即对任何$M>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，当$n\geqslant N$时，对一切$x\in E_\delta$，有$|g_n(x)|<1/M$，即$|f_n(x)|>M$（可设$M>1$）．

例3 设$\{f_n\}$是$[a,b]$上一列几乎处处有限的可测函数，且有

$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, a. e. ,证明:存在一列可测集$E_n\subset[a,b]$, $n=1,2,\cdots$,使得$m([a,b]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=0$,而$\{f_n\}$在每一个$E_n$上一致收敛于$f$.

证 依叶果洛夫定理,取$E_n\subset[a,b]$, $m([a,b]\setminus E_n)<1/n$, $\{f_n\}$在E_n上一致收敛于f,于是

$$m([a,b]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\leqslant m([a,b]\setminus E_n)<1/n,$$

即

$$m([a,b]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=0.$$

例4 对于E中每一点都趋于∞的函数列建立叶果洛夫定理.

解 (1)建立相应叶果洛夫定理如下:

设可测函数列$\{f_n\}$在E上几乎处处收敛于∞,则对任给的$\delta>0$,有$E_\delta\subset E$, $m(E\setminus E_\delta)<\delta$, $\{f_n\}$在E_δ上一致收敛于∞.

(2)给出定理证明如下:

令$P=\{x:f_n\to+\infty\}$, $Q=E\setminus P$,则$m(Q)=0$.

取数列a_i单调增加趋于∞, $i=1,2,\cdots$,则有

$$P=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\{x:f_k>a_i\},\quad Q=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{x:f_k\leqslant a_i\}.$$

记

$$A_n^i=\bigcup_{k=n}^{\infty}\{x:f_k\leqslant a_i\},$$

$$Q=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{x:f_k\leqslant a_i\}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^i.$$

由$m(Q)=0$,可知$m(\bigcap_{n=1}^{\infty})A_n^i=0$,易知$A_{n+1}^i\subset A_n^i$,从而$\lim_{n\to\infty}m(A_n^i)=0$, $i=1,2,\cdots$.

取正数列$\{\eta_i\}$单调减少趋于零,且$\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i<\infty$,则对每一个$a_i$, η_i必存在n_i,使得$m(A_{n_i}^i)<\eta_i$. 同时,对任给的$\delta>0$,必有i_0存在,使得$\sum_{i=i_0}^{\infty}\eta_i<\delta$. 令$E_\delta=\bigcap_{i=i_0}^{\infty}\bigcap_{k=n_i}^{\infty}\{x:f>a_i\}$,则

$$m(E\setminus E_\delta)=m\left(E\setminus\bigcup_{i=i_0}^{\infty}A_{n_i}^i\right)\leqslant\sum_{i=i_0}^{\infty}m(A_{n_i}^i)=\sum_{i=i_0}^{\infty}\eta_i<\delta.$$

对任给正数M，必有i_1 $(i_1\geqslant i_0)$存在，使得$a_{i_1}>M$. 而对任一$x\in E_\delta=\bigcap\limits_{i=i_0}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n_i}^{\infty}\{x:f_i>a_i\}$，必有$x\in\bigcap\limits_{k=n_i}^{\infty}\{x:f_k>a_i\}$，即当$k\geqslant n_i$时，对一切$x\in E_\delta$，恒有

$$f_k(x)>a_{i_1}>M.$$

因为n_{i_1}的取法与x无关，而只与M有关. 从而得知，$\{f_k\}$在E_δ上一致趋于∞.

例5 证明：存在以多项式为项的级数$p_1(x)+p_2(x)+\cdots$具有下列性质：对于在$[a,b]$上所定义的任何一个连续函数$f(x)$，可以将此级数由项的归并(不改变顺序)使级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}[p_{n_k+1}(x)+p_{n_k+2}(x)+\cdots+p_{n_{k+1}}(x)]$$

在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$.

证 因为$f(x)$在$[a,b]$上连续，依维尔斯特拉斯定理存在一列多项式$\{g_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$，而对每个$g_n(x)$又存在一列有理系数多项式$\{h_k^n(x)\}$一致收敛于$g_n(x)$，从而存在一列有理系数多项式$\{h_i(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$. $\{h_i(x)\}$的取法如下：

设数列$\{\varepsilon_i\}$单调减少趋于零，则对每个$\varepsilon_i>0$，必有n_i存在，使对一切$x\in[a,b]$有$|g_{n_i}(x)-f(x)|<\varepsilon_i/2, i=1,2,\cdots$.

对每个$g_{n_i}(x)$，又必有$h_{k_i}^{n_i}(x)$，使得对一切$x\in[a,b]$，有

$$|g_{n_i}(x)-h_{k_i}^{n_i}(x)|<\varepsilon_i/2,\quad i=1,2,\cdots.$$

令$h_i(x)=h_{k_i}^{n_i}(x)$，则对任给的$\varepsilon>0$，必有$\varepsilon_{i_0}<\varepsilon$，从而当$i\geqslant i_0$时，对一切$x\in[a,b]$，有

$$|h_i(x)-f(x)|\leqslant|h_i(x)-g_{n_i}(x)|+|g_{n_i}(x)-f(x)|<\varepsilon_i<\varepsilon_{i_0}<\varepsilon.$$

即知$\{h_i(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$.

因为有理系数多项式全体只有可列个，设排成$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$. 于是，依上面所证，对任一$[a,b]$上的连续函数$f(x)$，必有$\{\varphi_n(x)\}$的一个子列$\{\varphi_{n_i}(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$. 令

$$p_1(x)=\varphi_1(x),p_2(x)=\varphi_2(x)-\varphi_1(x),\cdots$$
$$p_n(x)=\varphi_n(x)-\varphi_{n+1}(x),\cdots$$

于是
$$\varphi_{n_k}(x)=\sum_{j=1}^{n_k}p_j(x)$$
$$=\sum_{j=0}^{k-1}(p_{n_j+1}(x)+p_{n_j+2}(x)+\cdots+p_{n_{j+1}}(x)).$$

而 $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，这等价于级数 $\sum_{j=0}^{\infty}[p_{n_j+1}(x)+p_{n_j+2}(x)+\cdots+p_{n_j+1}(x)]$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

例6 设函数列 $\{f_{n,m}\}$ 在 E 上依测度收敛于 f_n，$n=1,2,\cdots$. 又函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f. 证明：在 $\{f_{n,m}\}$ 中存在一个子列依测度收敛于 f.

证 因为对任何 $k\in\mathbf{N}$，$\{f_n\}$ 依测度收敛于 f，所以
$$m(\{x:|f_n-f|>1/(2k)\})\to 0.$$

故存在 n_k，使得 $m(\{x:|f_{n_k}-f|>1/(2k)\})<1/(2k)$.

同样，因 $\{f_{n,m}\}$ 依测度收敛于 f_n，所以存在 m_k，使得
$$m(\{x:|f_{n,m}-f_{n_k}|>1/(2k)\})<1/(2k).$$

从而
$$m(\{x:|f_{n,m}-f|>1/k\})$$
$$\leqslant m(\{x:|f_{n_k,m_k}-f_{n_k}|>1/(2k)\})$$
$$+m(\{x:|f_{n_k}-f|>1/(2k)\})$$
$$<1/(2k)+1/(2k)=1/k.$$

于是，易知 $\{f_{n,m}\}$ 依测度收敛于 f.

例7 若 $m(E)<\infty$，$\{f_n(x)\}$ 依测度收敛于 f，g 是几乎处处有限的函数，证明：$f_n(x)g(x)$ 依测度收敛于 $f(x)g(x)$.

证 只需证对任意 $\sigma>0$，有
$$\lim_{n\to\infty}m(\{x:|f_n(x)g(x)-f(x)g(x)|\geqslant\sigma\})=0,$$

已知 $\{x:|g(x)|=\infty\}=\bigcap_{N=1}^{\infty}\{x:|g(x)|>N\}$，且 $m(\{x:|g(x)|$

$=\infty\})=0$. 设 $A_N=\{x:|g(x)|>N\}$，则 $\{A_N\}$ 是单调减少的可测集列. 因为 $m(E)<\infty$，故

$$0=m(\{x:|g(x)|=\infty\})=m(\bigcap_{N=1}^{\infty}\{x:|g(x)|>N\})=\lim_{N\to\infty}m(A_N).$$

从而，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 N，使得

$$m(A_N)=m(\{x:|g(x)|>N\})<\varepsilon/2. \quad ①$$

对应于 N 和 ε，必存在 N_0，使得当 $n\geqslant N_0$ 时，有

$$m(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma/N\})<\varepsilon/2. \quad ②$$

而对任意的 $\sigma>0$，

$$\{x:|f_n(x)g(x)-f(x)g(x)|\geqslant\sigma\}$$
$$=\{x:|f_n(x)-f(x)||g(x)|\geqslant\sigma\}$$
$$\subset\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma/N\}\cup\{x:|g(x)|>N\},$$

于是 $m(\{x:|f_n(x)g(x)-f(x)g(x)|>\sigma\})$

$$\leqslant m(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma/N\})+m(\{x:|g(x)|>N\}).$$

由式①与式②有

$$0\leqslant m(\{x:|f_n(x)g(x)-f(x)g(x)|\geqslant\sigma\})<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}m(\{x:|f_n(x)g(x)-f(x)g(x)|\geqslant\sigma\})=0.$

例8 若 $f_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$，在 E 上 $f(x)=g(x)$, a. e.，证明：$f_n(x)$ 依测度收敛于 $g(x)$.

证 只需证对任意的 $\sigma>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}m(\{x:|f_n(x)-g(x)|\geqslant\sigma\})=0,$$

因为对任何 $\sigma>0$，

$$\{x:|f_n(x)-g(x)|\geqslant\sigma\}$$
$$\subset\{x:f(x)\neq g(x)\}\cup\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}.$$

而由题设知，$m(\{x:f(x)\neq g(x)\})=0$，所以

$$m(\{x:|f_n(x)-g(x)|\geqslant\sigma\})\leqslant m(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}),$$

又因为 $f_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$，故取极限有

$$\lim_{n\to\infty}m(\{x:|f_n(x)-g(x)|\geqslant\sigma\})$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} m(\{x: |f_n(x)-f(x)| \geqslant \sigma\})=0.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} m(\{x: |f_n(x)-g(x)| \geqslant \sigma\})=0$.

例9 若$f_n(x)$和$g_n(x)$分别依测度收敛于$f(x)$和$g(x)$，证明：$f_n(x)+g_n(x)$依测度收敛于$f(x)+g(x)$.

证 只需证对任意的$\sigma>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} m(\{x: |[f_n(x)+g_n(x)]-[f(x)+g(x)]| \geqslant \sigma\})=0,$$

因为
$$|[f_n(x)+g_n(x)]-[f(x)+g(x)]| \leqslant |f_n(x)-f(x)|+|g_n(x)-g(x)|,$$

对任意的$\sigma>0$，

$$\{x: |[f_n(x)+g_n(x)]-[f(x)+g(x)]| \geqslant \sigma\}$$
$$\subset \{x: |f_n(x)-f(x)| \geqslant \sigma/2\} \cup \{x: |g_n(x)-g(x)| \geqslant \sigma/2\},$$

所以

$$m(\{x: |[f_n(x)+g_n(x)]-[f(x)+g(x)]| \geqslant \sigma\})$$
$$\leqslant m(\{x: |f_n(x)-f(x)| \geqslant \sigma/2\})$$
$$+m(\{x: |g_n(x)-g(x)| \geqslant \sigma/2\}).$$

由题设知

$$m(\{x: |[f_n(x)+g_n(x)]-[f(x)+g(x)]| \geqslant \sigma\}) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

所以，对任意$\sigma>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} m(\{x: |[f_n(x)+g_n(x)]-[f(x)+g(x)]| \geqslant \sigma\})=0.$$

例10 设E是$\mathbf{R}^1$上测度有限的可测集，f是E上的可测函数. 证明：必存在一列阶跃函数$\{\varphi_n\}$，即每个φ_n均是有限区间特征函数的线性组合，使得$\{\varphi_n\}$既依测度收敛于f，又几乎处处收敛于f.

证 因为f可以用可测集E上的特征函数的线性组合一致地逼近，故设$\psi_n=\sum\limits_{i=1}^{m_n} C_i^{(n)} \chi_{E_i^{(n)}} \to f$，a. e.，其中$E_i^{(n)} \subset E$对一切$i$和$n$成立. 取一列正数$\{\varepsilon_n\}$，使$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. 对$E_i^{(n)}$，先取开集$O_i^{(n)}$，使得$O_i^{(n)} \supset E_i^{(n)}$，且$m(O_i^{(n)} \setminus E_i^{(n)}) < \varepsilon_n/2^{i+1}$，再由$m(E)<\infty$得$m(E_i^{(n)})<$

∞. 故可取$O_i^{(n)}$中有限个有限长的构成区间，记其并为$F_i^{(n)}$，使得$m(F_i^{(n)}\Delta E_i^{(n)})<\varepsilon_n/2^i$. 作阶跃函数

$$\varphi_n=\sum_{i=1}^{m_n}C_i^{(n)}\chi_{F_i^{(n)}}.$$

有
$$\{x:\varphi_n\neq\psi_n\}=E\cap(\bigcup(F_i^{(n)}\Delta E_i^{(n)})),$$

故
$$m(\{x:\varphi_n\neq\psi_n\})<\sum_i^{\infty}\varepsilon_n/2^i=\varepsilon_n.$$

注意到$\{x:|f-\varphi_n|>\varepsilon\}\subset\{x:|f-\psi_n|>\varepsilon\}\cup\{x:\varphi_n\neq\psi_n\}$.
因为$m(E)<\infty$，$\{\psi_n\}$一致收敛于f，故$\{\psi_n\}$依测度收敛于f. 从而

$$m(\{x:|f-\varphi_n|>\varepsilon\})$$
$$\leqslant m(\{x:|f-\psi_n|>\varepsilon\})+m(\{x:\varphi_n\neq\psi_n\})\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

即$\{\varphi_n\}$依测度收敛于f.

又有$\{x:\varphi_n\not\to f\}\subset\overline{\lim_{n\to\infty}}\{x:\varphi_n\neq\psi_n\}$，而

$$\sum m(\{x:\varphi_n\neq\psi_n\})<\sum\varepsilon_n<\infty,$$

故$m(\overline{\lim_{n\to\infty}}\{x:\varphi_n\neq\psi_n\})=0$，即得$\varphi_n\to f$，a.e..

例 11 设$\{f_n\}$在$[a,b]$上依测度收敛于f，g是$\mathbf{R}^1$上的连续函数. 证明：$\{g\cdot f_n\}$在$[a,b]$上依测度收敛于$g\cdot f$.

证 因为函数列依测度收敛等价于其任何子列有几乎处处收敛的子列，故对$\{f_n\}$的任何子列$\{f_{n_k}\}$，有子列$\{f_{n'_k}\}$，使得$f_{n'_k}\longrightarrow f$，a.e.. 又由函数$g$的连续性，可得$g\cdot f_{n'_k}\longrightarrow g\cdot f$，a.e.，所以知$\{g\cdot f_n\}$依测度收敛于$g\cdot f$.

例 12 说明在$m(E)=\infty$的E上，勒贝格定理不再成立.

解 如定义在$(0,\infty)$上的函数

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in(n-1,n),\\ 0, & x\overline{\in}(n-1,n),\end{cases}$$

显然有$f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}f(x)\equiv 0$.

但对$\sigma=1/2$，因为$m(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant 1/2\})=m(n-1,$

$n)=1$,所以$f_n(x)$不依测度收敛于f.

例13 若对于任意固定的n,当$k\to\infty$时,$f_k^{(n)}(x)$依测度收敛于$f^{(n)}(x)$,而当$n\to\infty$时,有$f^{(n)}(x)$依测度收敛于$f(x)$.证明:$\{f^{(n)}(x)\}$中可以选取函数列依测度收敛于$f(x)$.

证 任取两个单调减少的正数列$\{\sigma_n\}$与$\{\varepsilon_n\}$,对每个n,由于$f_k^{(n)}(x)$依测度收敛于$f^{(n)}(x)(k\to\infty)$,故必有k_n,使得

$$m(\{x:|f_{k_n}^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)|\geqslant\sigma_n/2\})<\varepsilon_n/2.$$

由于对任给的$\varepsilon>0,\delta>0$,存在$N_1\in\mathbf{N}$,当$n\geqslant N_1$时,$\sigma_n<\sigma,\varepsilon_n<\varepsilon$,有

$$\{x:|f_{k_n}^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)|\geqslant\sigma/2\}$$
$$\subset\{x:|f_{k_n}^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)|\geqslant\sigma_n/2\},$$

故
$$m(\{x:|f_{k_n}^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)|\geqslant\sigma/2\})$$
$$\leqslant m(\{x:|f_{k_n}^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)|\geqslant\sigma_n/2\})<\varepsilon_n/2<\varepsilon/2.$$

又由$f^{(n)}(x)$依测度收敛于$f(x)$知,必存在N_2,当$n\geqslant N_2$时,有

$$m(\{x:|f_{k_n}^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)|\geqslant\sigma/2\})<\varepsilon/2.$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,当$n>N$时,有

$$m(\{x:|f_{k_n}^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)|\geqslant\sigma/2\})<\varepsilon/2,$$
$$m(\{x:|f^{(n)}(x)-f(x)|\geqslant\sigma/2\})<\varepsilon/2.$$

而
$$\{x:|f_{k_n}^{(n)}(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}\subset\{x:|f_{k_n}^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)|\geqslant\sigma/2\}$$
$$\cup\{x:|f^{(n)}(x)-f(x)|\geqslant\sigma/2\}.$$

于是,当$n\geqslant N$时,有

$$m(\{x:|f_{k_n}^{(n)}(x)-f(x)|\geqslant\sigma\})<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

即$f_{k_n}^{(n)}(x)$依测度收敛于$f(x)$.

例14 将例11中的区间$[a,b]$换为测度为无限的可测集,$\{g\cdot f_n\}$是否还依测度收敛于$g\cdot f$.

解 否.如在$(0,\infty)$上考察函数列

$$f_n(x)=x+1/n,\quad n=1,2,\cdots,\quad f(x)=x,\quad g(x)=x^2.$$

显然$\{f_n\}$依测度收敛于f,但是,由于

$$(g\cdot f_n-g\cdot f)(x)=(x+1/n)^2-x^2=2x/n+1/n^2,$$
故知$\{g\cdot f_n-g\cdot f\}$不依测度收敛于零.

例 15 设$\{f_n\}$在E上依测度收敛于$f(x)$,且$f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$几乎处处成立,$n=1,2,\cdots$. 证明:几乎处处有$f_n(x)$收敛于$f(x)$.

证 因为$f_n(x)$依测度收敛于$f(x)$,所以存在子列$f_{n_k}(x)$在E上几乎处处收敛于$f(x)$. 令
$$A=\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:f_n>f_{n-1}\}\right]\cup\{x:f_{n_k}\not\to f\},$$
则$m(A)=0$. 设$E_0=E\setminus A$,任取$x_0\in E_0$,则$f_n(x_0)\leqslant f_{n+1}(x_0)$对任何$x_0$成立,且$f_{n_k}(x_0)\to f(x_0)$.

因为$\{f_n(x_0)\}$是单调增加数列,所以
$$f(x_0)=\lim_{k\to 0}f_{n_k}(x_0)=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0),$$
即在E_0上处处有$f_n(x)$收敛于$f(x)$,所以在E上几乎处处有$f_n(x)$收敛于$f(x)$.

例 16 一列几乎处处有限的可测函数$\{f_k(x)\}(k=1,2,\cdots)$依测度收敛的充要条件是:对于任何正数σ和ε,存在自然数N,当$n>N$且$m>N$时,$m(\{x:|f_n-f_m|\geqslant\sigma\})<\varepsilon$.

证 **必要性** 由$f_n(x)$依测度收敛于$f(x)$,$\forall\ \varepsilon>0,\sigma>0$,一定存在$N\in\mathbf{N}$,当$n>N$时,$m(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma/2\})<\varepsilon/2$. 又
$$\{x:|f_n(x)-f_m(x)|\geqslant\sigma\}\subset\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma/2\}\cup\{x:|f_m(x)-f(x)|\geqslant\sigma/2\},$$
$$m(\{x:|f_n(x)-f_m(x)|\geqslant\sigma\})\leqslant m(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma/2\})+m(\{x:|f_m(x)-f_n(x)|\geqslant\sigma/2\}).$$
故当$n>N$且$m>N$时,$m(\{x:|f_n(x)-f_m(x)|\geqslant\sigma\})<\varepsilon$.

充分性 任取数列$\{\eta_k\}$,$\eta_k>0$,$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\eta_k<\infty$. 由题设条件知,存在$n_k$,使
$$m(\{x:|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+m}}(x)\geqslant 1/2^k\})<\eta_k,$$

其中$k=1,2,\cdots;m=1,2,\cdots$. 从而可取$n_k$单调增加趋于$\infty$,且有

$$m(\{x:|f_{n_k+1}(x)-f_{n_k}(x)|\geqslant 1/2^k\})<\eta_k,$$

对这列$\{n_k\}$作

$$Q=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}\{x:|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)\geqslant 1/2^k\},$$

$$P=E\backslash Q=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{k=i}^{\infty}\{x:|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|<1/2^k\},$$

$$R_i=\bigcup_{k=i}^{\infty}\{x:|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\geqslant 1/2^k\}.$$

显然$R_1\supset R_2\supset\cdots\supset R_n\supset\cdots,Q=\bigcap_{i=1}^{\infty}R_i$. 因此

$$m(Q)=\lim_{i\to\infty}m(R_i)\leqslant\lim_{i\to\infty}\sum_{k=i}^{\infty}m(\{x:|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\geqslant 1/2^k\})$$

$$\leqslant\lim_{i\to\infty}\sum_{k=i}^{\infty}\eta_k=0\Longrightarrow m(Q)=0.$$

下面证明$\{f_{n_k}(x)\}$是P上的收敛基本列,记

$$P=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{k=i}^{\infty}\{x:|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|<1/2^k\}=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i.$$

显然,$A_i\subset A_{i+1}\subset\cdots$. 若$x\in P$,则必存在$i_0$,使$x\in A_{i_0}\subset A_{i_0+1}\subset\cdots$, $\forall\ \varepsilon>0$,必有$i>i_0$,使得$1/2^{i-1}<\varepsilon,x\in A_i\subset A_{i+1}\subset\cdots$,故对一切$l>i,m=1,2,\cdots$,有

$$\begin{aligned}&|f_{n_l}(x)-f_{n_{l+m}}(x)|\\ \leqslant&\sum_{j=l}^{m}|f_{n_{j+1}}(x)-f_{n_j}(x)|\leqslant\sum_{j=l}^{\infty}|f_{n_j+1}(x)-f_{n_j}(x)|\\ \leqslant&\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2^{i-1}}<\varepsilon.\end{aligned}$$

所以,$f_{n_k}(x)$在P上收敛于某个$f(x)$. 其中$f(x)=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)(x\in P)$.

显然,$f_{n_k}(x)$依测度收敛于$f(x)$. 于是,$\forall\ \varepsilon>0,\sigma>0,\exists\ N\in\mathbf{N}$,当$n_k>N,n>N$时,有

$$m(\{x:|f_n(x)-f_{n_k}(x)|\geqslant\sigma/2\})>\varepsilon/2,$$

$$m(\{x:|f_{n_k}(x)-f(x)|\geqslant\sigma/2\})<\varepsilon/2.$$

而 $$\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}\subset\{x:|f_n(x)-f_{n_k}(x)|\geqslant\sigma/2\}\cup\{x:|f_{n_k}(x)-f(x)|\geqslant\sigma/2\},$$

从而，当 $n>N$ 时，有

$$m(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\})<\varepsilon,$$

即 $\{f_n(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$.

例 17 作一依测度收敛但处处不收敛的函数列.

解 设 $(\mathbf{R}^1,\mathscr{L},m)$ 为勒贝格测度空间，$E=(0,1]\subset\mathbf{R}^1$，将 $(0,1]$ 二等分，作函数 $f_1^{(1)}(x)$ 与 $f_2^{(1)}(x)$：

$$f_1^{(1)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(0,\frac{1}{2}\right],\\ 0, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right];\end{cases}\qquad f_2^{(1)}(x)=\begin{cases}0, & x\in\left(0,\frac{1}{2}\right],\\ 1, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

再将 $(0,1]$ 四等分、八等分……，对 $n\in\mathbf{N}$，作 2^n 个函数

$$f_j^{(n)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right],\\ 0, & x\overline{\in}\left(\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right],\end{cases}\quad j=1,2^1,2^2,\cdots,2^n.$$

将 $\{f_j^{(n)}\mid j=1,2^1,2^2,\cdots,2^n\}$ 先按 n 后按 j 的次序排成一列：

$$f_1^{(1)},f_2^{(1)},f_1^{(2)},f_2^{(2)},\cdots,f_1^{(n)},\cdots,f_{2^n}^{(n)},\cdots.$$

显然，$f_j^{(n)}$ 为这函数列中第 N 个函数，

$$N=2+2^2+\cdots+2^{n-1}+j=2\left(\frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right)+j$$

$$=2^n-2+j,j=1,2^1,2^2,\cdots,2^n,$$

且 $N\to\infty\Longleftrightarrow n\to\infty$. 因为 $\forall\ \varepsilon>0$，有

$$E(|f_j^{(n)}-0|>\varepsilon)=\begin{cases}\varnothing, & \varepsilon\geqslant 1,\\ \left(\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right), & 0<\varepsilon<1.\end{cases}$$

所以 $$m(E(|f_j^{(n)}-0|>\varepsilon))=\begin{cases}0, & \varepsilon\geqslant 1,\\ 1/2^n, & 0<\varepsilon<1,\end{cases}$$
$$\to 0(N\to\infty,\text{即 } n\to\infty).$$

故有 $$f_j^{(n)}\underset{m}{\Rightarrow}0 \quad (\underset{m}{\Rightarrow}\text{ 表示依测度收敛}).$$

但$\{f_j^{(n)}\}$在$E=(0,1]$上任一点处都不收敛. 这是因为, $\forall\ x\in(0,1],\forall\ n\in\mathbf{N}$,存在相应的$j$使得$x\in\left(\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right]$. 因而$f_j^{(n)}(x)=1$, $f_{j-1}^{(n)}(x)=f_{j+1}^{(n)}(x)=0$. 即$\forall\ x\in E=(0,1]$,在$\{f_j^{(n)}(x)\}$中必有两个子列,一个恒为1,另一个恒为0,所以$\{f_j^{(n)}(x)\}$在$E=(0,1]$中任一点处都不收敛.

例18 举例说明:当$\mu(E)=\infty$时,对E上的两个可测函数列, $f_n\underset{\mu}{\Rightarrow}f, g_n\underset{\mu}{\Rightarrow}g$,虽然$f,g$在$E$上可测,但$f_n\cdot g_n$不一定依测度收敛于$f\cdot g$.

解 设$E=(1,\infty)$, $\mu=m$为E上的勒贝格测度
$$f_n(x)=\begin{cases}k, & x\in(k,k+1],k\neq n,k\in\mathbf{N},\\ n+1/k, & x\in(n,n+1].\end{cases}$$
$$f(x)=k,x\in(k,k+1],\quad k\in\mathbf{N}.$$

则 $$f_n(x)-f(x)=\begin{cases}0, & x\in(k,k+1),k\neq n,\\ 1/n, & x\in(n,n+1).\end{cases}$$

所以,$\forall\ \varepsilon>0$,当$n>1/\varepsilon$(即$\varepsilon<1/n$)时,有
$$E(|f_n-f|>\varepsilon)=\varnothing,$$
$$\lim_{n\to\infty}m(E(|f_n-f|>\varepsilon))=\lim_{n\to\infty}m(\varnothing)=\lim_{n\to\infty}0=0,$$
$$f_n\underset{\mu}{\Rightarrow}f.$$

但是 $$|f_n^2(x)-f^2(x)|=|[f_n(x)-f(x)][f_n(x)+f(x)]|$$
$$=\frac{1}{n}\left[\left(n+\frac{1}{n}\right)+n\right]$$
$$=2+\frac{1}{n^2},\quad x\in(n,n+1).$$

所以 $$m(E(|f_n^2-f^2|))=m((n,n+1))=1,\quad \forall\ n\in\mathbf{N}.$$

故 $$f_n^2 \underset{\mu}{\not\Rightarrow} f^2.$$

第三节 可测函数与连续函数

主要内容

1. 鲁金(Пузин)定理 若$f(x)$是E上几乎处处有限的可测函数,则对任给的$\delta>0$,存在E中的一个闭集F,$m(E\setminus F)<\delta$,使得$f(x)$是F上的连续函数.

2. 若$f(x)$是E上几乎处处有限的可测函数,则对任给的$\delta>0$,存在$\mathbf{R}^n$上的一个连续函数$g(x)$,使得$m(\{x:f(x)\neq g(x)\})<\delta$.若$E$还是有界集,则可使上述$g(x)$具有紧支集.

若$f(x)$是E上几乎处处有限的可测函数,则存在$\mathbf{R}^n$上的连续函数列$\{g_k(x)\}$,使得

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x)=f(x),\text{a. e.},\quad x\in E.$$

3. 若$f(x)$是定义在$\mathbf{R}^n$上的实值函数,则$f(x)$在$\mathbf{R}^n$上可测的充分必要条件是:对于$\mathbf{R}^1$中的任一开集,$f^{-1}(G)$是可测集.

4. 设$f(x)$是$\mathbf{R}^1$上的连续函数,$g(x)$是$\mathbf{R}^1$上的实值可测函数,则复合函数$h(x)=f(g(x))$是$\mathbf{R}^1$上的可测函数.

5. 设$T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$是连续变换,当$Z\subset\mathbf{R}^n$且$m(Z)=0$时,$T^{-1}(Z)$是零测集.若$f(x)$是$\mathbf{R}^n$上的实值可测函数,则$f(T(x))$是$\mathbf{R}^n$上的可测函数.

6. 设$f(x)$是$\mathbf{R}^n$的实值可测函数,$T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$是非奇异线性变换,则$f(T(x))$是$\mathbf{R}^n$上的可测函数.

疑难解析

鲁金定理有什么意义?它还有什么别的形式?

答 鲁金定理揭示了可测函数与连续函数的关系,使我们对

可测函数的结构有了进一步的了解. 在应用上，通过鲁金定理常常能把有关一般的可测函数的问题化为有关连续函数的问题，使问题得到简化.

注意 鲁金定理的结论不能改为：$m(E\setminus F)=0$，而 $f(x)$ 在 F 上连续.

鲁金定理的另一种形式是：设 E 是直线上的勒贝格可测集，f 是 E 上的可测函数，则对任何 $\delta>0$，必然有直线上的连续函数 h，使得

$$m(\{x:f\neq h\})<\delta.$$

方法、技巧与典型例题分析

利用鲁金定理及其推论（主要内容2）证明命题时，首先要验证是否满足（或经过简单推理可以验证）鲁金定理，然后再作进一步的论证. 在推理中，往往采取先简单后一般的方法. 如证明鲁金定理时，先考虑 $f(x)$ 是简单函数情形，再考虑 $f(x)$ 是一般可测函数情形，使命题分层次得到证明.

例1 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的实值可测函数，且对任意的 $x,y\in\mathbf{R}^1$，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明：$f(x)$ 是连续函数.

证 由题设得 $f(x+h)-f(x)=f(h)$ 及 $f(0)=0$，故只需证 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续即可. 依鲁金定理，可作有界闭集 F：$m(F)>0$，使 $f(x)$ 在 F 上（一致）连续. 即 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta_1>0$，使得对 $x,y\in F$，只要 $|x-y|<\delta$，恒有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

现在来研究 $F-F$（向量差）点集，依第二章第三节主要内容一第2点，存在 $\delta_2>0$，使得 $F-F\supset[-\delta_2,\delta_2]$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $z\in[-\delta,\delta]$ 时，由于存在 $x,y\in F$，使得 $z=x-y$，故可得

$$|f(z)|=|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|<\varepsilon,$$

从而知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例2 设 F 是直线上的闭集，函数 f 在 F 上连续. 证明：必有直线上的连续函数 h，使得当 $x\in F$ 时，$f(x)=h(x)$.

证　设$F^C=\bigcup\limits_n(\alpha_n,\beta_n)$，其中$(\alpha_n,\beta_n)$是$F^C$的构成区间，定义$\mathbf{R}^1$上的函数

$$h(x)=\begin{cases}f(x), & x\in F,\\ f(\alpha_n)\dfrac{\beta_n-x}{\beta_n-\alpha_n}+f(\beta_n)\dfrac{x-\alpha_n}{\beta_n-\alpha_n}, & x\in(\alpha_n,\beta_n),\left|\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right|<\infty,\\ f(\beta_n), & x\in(\alpha_n,\beta_n),\alpha_n=-\infty,\\ f(\alpha_n), & x\in(\alpha_n,\beta_n),\beta_n=\infty.\end{cases}$$

即h在F上取值与f相同，在F^C的构成区间上是线性函数，且在端点处连续.

因为F^C中每一点都是h的连续点，故只需证F中的点也是h的连续点即可.

任取$x_0\in F$，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当$x\in F\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 若$(x_0-\delta,x_0)$中不含$F$中的点，则$x_0$必为某个构成区间$(\alpha_n,\beta_n)$的右端点. 又由$h$是$(x_0-\delta,x_0)$中的线性函数，必存在$\eta$，使得当$x\in(\eta,x_0)$时，有$|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$. 若$(x_0-\delta,x_0)$中含$F$中的点，例如$\eta$，则当$x\in[\eta,x_0]\cap F$时，有$h(x)=f(x)$，$h(x_0)=f(x_0)$，因此$|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$. 又若$x\in[\eta,x_0)\setminus F$，则必有$F$的余区间$(\alpha_n,\beta_n)$，$x\in(\alpha_n,\beta_n)\subset(\eta,x_0)$. 由于$\alpha_n,\beta_n\in[\eta,x_0]\cap F$，所以有

$$|h(\alpha_n)-h(x_0)|<\varepsilon,\quad |h(\beta_n)-h(x_0)|<\varepsilon.$$

因为$h(x)$的值介于$h(\alpha_n)$与$h(\beta_n)$之间，即$|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$. 从而证得$x_0$是$h(x)$的左连续点.

类似可证x_0是$h(x)$的右连续点. 于是，x_0是h的连续点，即h在F中连续.

例3(鲁金定理的另一形式)　设E是直线上的可测集，f是E上的可测函数，则$\forall\ \varepsilon>0$，必有直线上的连续函数h，使得

$$m(\{x:f\neq h\})<\delta.$$

证　由鲁金定理，对每个$\delta>0$，存在$E_\delta\subset E$，使得f在E_δ上连续，且$m(E\setminus E_\delta)<\delta$. 又由例2，把$E_\delta$上的连续函数延拓为$\mathbf{R}^1$上的连续函数$h$，于是$\{x:f\neq h\}\subset E\setminus E_\delta$，从而$m(\{x:f\neq h\})<\delta$.

例 4（鲁金定理的逆定理） 设$f(x)$在可测集E上几乎处处有限，若$\forall\ \varepsilon>0$，存在闭集F，使$F\subset E$，$m(E\setminus F)<\varepsilon$，且$f(x)$在$F$上连续. 证明：$f(x)$是$E$上的可测函数.

证 对$\varepsilon_n=1/n$，令$M=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，$E_1=E\setminus M$，则$m(E_1)=m(E\setminus M)=0$. 因为对于任意实数$t$，$\{x:f(x)\geqslant t,x\in F_n\}$是闭集，所以

$$\{x:f(x)\geqslant t,x\in M\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:f(x)\geqslant t,x\in F_n\}$$

是可测集. 从而

$$\{x:f(x)\geqslant t,x\in E\}=\{x:f(x)\geqslant t,x\in M\}\cup\{x:f(x)\geqslant t,x\in E_1\}$$

是可测集. 由t的任意性知，$f(x)$在E上可测.

例 5 设$f(x)$是(a,b)上的实值可测函数，且满足

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad x,y\in(a,b).$$

证明：$f(x)$在(a,b)上连续.

证 用反证法. 设$f(x)$在点$x_0\in(a,b)$上不连续，考察区间$(x_0-2\delta,x_0+2\delta)$. 因为$f(x)$是无界的，所以存在$\xi_k\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，使得$f(\xi_k)\geqslant k$，$k=1,2,\cdots$. 对于$x\in(\xi_k-\delta,\xi_k+\delta)$，有

$$x_0-2\delta\leqslant x\leqslant x_0+2\delta,\quad x_0-2\delta\leqslant x'=2\xi_k-x\leqslant x_0+2\delta.$$

由$2f(\xi_k)\leqslant f(x)+f(x')$可知，或$f(x)\geqslant k$或$f(x')\geqslant k$. 于是得

$$m(\{x:x_0-2\delta\leqslant x\leqslant x_0+2\delta,f(x)\geqslant k\})\geqslant\delta,$$

与$f(x)$是实值函数矛盾.

例 6 设f是$(-\infty,\infty)$上的勒贝格可测函数，且对一切t_1、$t_2\in(-\infty,\infty)$，均有$f(t_1+t_2)=f(t_1)+f(t_2)$. 证明：必有常数C，使得$f(t)=Ct$.

证 由数学分析中函数方程的知识知，若f是实直线上的连续函数，且满足$f(t_1+t_2)=f(t_1)+f(t_2)$，则必有$f(t)=Ct$. 故只需证f是t的连续函数即可.

任取$n>2$，来证f在$[-n,n]$上连续.

依鲁金定理，取闭集$E\subset[-n,n]$，使得$m([-n,n]\setminus E)<1$，且

f 在 E 上连续，则有

$$m(E)=m([-n,n])-m([-n,n]\backslash E)>2n-1,$$

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，使得当 $x_1,x_2\in E$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 可设 $\delta=1/2$，来证当 $x',x''\in[-n,n]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时，也有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 记 $x''=x'+d$，先证必有 $x_1,x_2\in E$，使 $x_1-x_2=d$. 为此，必须证明 $E\cap(E+d)=\varnothing$，其中 $E+d=\{x+d:x\in E\}$. 由于 $E\cup(E+d)\subset[-n,n+d]$，依勒贝格测度的平移不变性，有

$$\begin{aligned}m(E\cap(E+d))&=m(E)+m(E+d)-m(E\cup(E+d))\\&=2m(E)-m(E\cup(E+d))\\&>4n-2-2n-d=2n-2-d>0.\end{aligned}$$

所以 $E\cap(E+d)\neq\varnothing$. 于是，对 $x_1,x_2\in E,x_1-x_2=d$，有

$$|f(x')-f(x'')|=|f(d)|=|f(x_1-x_2)|=|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

从而，f 是 E 上的连续函数.

例7 设 E 是直线上的可测集，f 是定义在 E 上的实值函数. 证明：f 是可测函数的充要条件是，存在直线上的一列连续函数 $\{f_n\}$，使 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f.

证　充分性 设一列定义在直线上的连续函数 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f. 而 E 上的连续函数必然可测，所以作为几乎处处收敛的可测函数的极限，f 也是可测的.

必要性 若 f 是 E 上的可测函数，依鲁金定理，对于任何固定的 n，必有直线上的连续函数 g_n，使得 $m(\{x:f\neq g_n\})<1/n$，从而有 g_n 依测度收敛于 f. 则依黎斯定理，依测度收敛的可测函数列必有子列几乎处处收敛. 因此，可取 $\{g_n\}$ 的子列 $\{g_{n_k}\}$，使 $\{g_{n_k}\}$ 几乎处处收敛于 f. 于是，只需令 $\{g_{n_k}\}=\{f_n\}$ 即可.

例8 设 f 是定义于 $E=[a,b]$ 上的几乎处处有限的可测函数. 证明：

(1) 定义于 $(-\infty,\infty)$ 上的函数 F：$F(t)=m(\{x:f>t\})$ 是单调减少的右连续函数；

(2)定义于$[a,b]$上的函数G:$G(x)=\sup\{t:F(t)+a>x\}$对任何实数t,下式成立:

$$m(\{x:G>t\})=m(\{x:f>t\}).$$

证 (1)F显然是单调减少的,设$\{t_n\}$单调减少收敛于t_0,则$\{x:f>t_0\}=\{x:f>t_0\}\cup\{x:t_n>f>t_0\}$,而$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x:t_n\geqslant f>t_0\}=\varnothing$,所以$m(\{x:t_n\geqslant f>t_0\})\to 0$. 即$F(t_n)-F(t_0)\to 0$,从而$F$右连续.

(2)G也是单调减少的. 现证$\{x:G(x)>t\}=[a,F(x)+a)$. 因为,若$x_0\in\{x:G(x)>t\}$,由$G(x_0)>t$可知存在t_1,$t<t_1<G(x_0)$,使得$F(t_1)+a>x_0$. 由于F单调减少,$t<t_1$,所以$x_0<F(t_1)+a\leqslant F(t)+a$,即$x_0\in[a,F(t)+a)$. 反之,若$x_0\in[a,F(t)+a)$,则$x_0<F(t)+a$,由$F$右连续,故存在$t_1>t$,使得$F(t_1)+a>x_0$,故$G(x_0)\geqslant t_1>t$,从而$x_0\in\{x:G(x)>t\}$,由此

$$m(\{x:G(x)>t\})=F(t)=m(\{x:f>x\}).$$

例9 设$\{f_n\}$是E上一列可测函数,$\{f_n\}$依测度收敛于f. 证明:必存在子序列$\{f_{n_k}\}$,使得对任何$\delta>0$,总存在$E_\delta\subset E$,满足$m(E\setminus E_\delta)<\delta$,且$\{f_{n_k}\}$在$E_\delta$上一致收敛于$f$.

证 对任何$k\in\mathbf{N}$,可选取n_k,使得$m(\{x:|f_{n_k}-f|>1/2^k\})<1/2^k$. 设$\{n_k\}$单调增加,对任何$\delta>0$,取$k$,使$\sum\limits_{k=k}^{\infty}\dfrac{1}{2^k}<\delta$. 记

$$E_\delta=\bigcap_{k=k}^{\infty}\{x:|f_{n_k}-f|\leqslant\frac{1}{2^k}\},$$

于是$E\setminus E_\delta=\bigcup\limits_{k=k}^{\infty}\{x:|f_{n_k}-f|>\dfrac{1}{2^k}\}$,因此

$$m(E\setminus E_\delta)=\sum_{k=k}^{\infty}m(\{x:|f_{n_k}-f|>\frac{1}{2^k}\})>\delta,$$

易见$\{f_{n_k}\}$在E_δ上一致收敛于f.

例10 设$m(E)<\infty$,$f(x)$是E上几乎处处有限的可测函数. 证明:$\forall\ \varepsilon>0$,存在有界可测函数$g(x)$,使得

$$m(\{x:f(x)\neq g(x)\})<\varepsilon.$$

证 设 $A_k=\{x:|f(x)|>k\}$，$Q=\{x:|f(x)|=\infty\}$，则由题设知，$m(Q)=0$. 又 $A_1\supset A_2\supset\cdots$，$Q=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$，得 $\lim_{k\to\infty}m(A_k)=m(Q)=0$，故必存在 k_0，使 $m(A_{k_0})<\varepsilon$. 在 E 上定义函数

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E\setminus A_{k_0},\\ 0, & x\in A_{k_0}.\end{cases}$$

则 $g(x)$ 显然是可测的且是有界的. 因为 $|g(x)|\leqslant k_0$ 且 $\{x:f(x)\neq g(x)\}=A_{k_0}$，所以 $g(x)$ 是符合要求的有界可测函数.

例 11 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值可测函数，证明：存在数列 $\{h_k\}$，使得 $\lim_{k\to\infty}h_k=0$，$\lim_{k\to\infty}f(x+h_k)=f(x)$，a. e.，$x\in[a,b]$.

证 依鲁金定理，作闭集 $F_k\subset[a,b]$，$k=1,2,\cdots$，使得

$$f\in C(F_x),\ |F_k|>(b-a)-1/k^2,\ k=1,2,\cdots.$$

易知存在 $\eta_k>0$，使得当 $|h|>\eta_k$ 时，有

$$|f(x+h)-f(x)|<1/k,\quad x\in F_k, x+h\in F_k.$$

取 $|h_k|<\eta_k$，$k=1,2,\cdots$，作 $E_k<F_k$，使得 $m(E_k)>(b-a)-2/k^2$，且在 E 上有 $|f(x+h_k)-f(x)|<1/k$. 由 $m(\underline{\lim}_{k\to\infty}E_k)=b-a$，即得所证.

例 12 设有定义在可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的函数 f，对任何的 $\delta>0$，存在 E 中的闭集 F，使 $m(E\setminus F)<\delta$，f 在 F 上连续. 证明：f 是 E 上的可测函数.

证 由题设，可取闭集 $F_n\subset E$，使得 $m(E\setminus F_n)<1/n^2$，f 在 F_n 上连续. 作函数

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & x\in F_n,\\ 0, & x\in E\setminus F_n,\end{cases}\quad(n=1,2,\cdots)$$

则 f_n 是 E 上的可测函数. 又由 $\sum_{n=1}^{\infty}m(E\setminus F_n)<\infty$，故

$$m(E\setminus\underline{\lim}_{n\to\infty}E_n)=m(\overline{\lim}_{n\to\infty}(E\setminus E_n))=0,$$

而 $x\in\underline{\lim}_{n\to\infty}E_n$ 时，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，所以 f 是可测函数列 $\{f_n\}$ 几乎

处处收敛的极限，从而 f 是 E 上的可测函数.

例 13 证明：存在 $[a,b]$ 上的一列连续函数 $\{f_n\}$，使得形式级数 $f_1+f_2+\cdots+f_n+\cdots$ 在不打乱顺序，但在其中插入括号分段求和后得到的函数项级数几乎处处收敛于任何给定的勒贝格可测函数.

证 首先来证明任一可测函数 f 必为一列连续函数 $\{g_n\}$ 几乎处处收敛的极限，为此利用鲁金定理，取 $g_n\in[a,b]$，使得

$$m(\{x:f\neq g_n\})<1/2^n.$$

由此
$$\sum_{n=1}^{\infty}m(\{x:f\neq g_n\})<\infty.$$

所以
$$m(\overline{\lim_{n\to\infty}}\{x:f\neq f_n\})=0.$$

在点集 $\underline{\lim}_{n\to\infty}(\{x:f\neq g_n\})$ 上 $g_n\to f$，所以，$g_n\to f$, a.e. ,$x\in[a,b]$.

由维尔斯特拉斯定理，任一连续函数必是多项式一致收敛的极限，从而也是有理系数多项式一致收敛的极限. 而有理系数多项式全体为可列集，记此可列集为 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$. 任一连续函数必为 $\{\varphi_n\}$ 某子列的一致收敛极限，故对每个 n 可取 k_n，使得 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f_n(x)-\varphi_n(x)|<1/n$. 可设 $\{k_n\}$ 单调增加，于是 $\varphi_n\to f$, a.e. ,$x\in[a,b]$.

作 $\{f_n\}$ 如下：

$$f_1=\varphi_1,f_2=\varphi_2-\varphi_1,\cdots,f_n=\varphi_n-\varphi_{n-1},\cdots,$$

于是，$\varphi_{k_n}=\sum\limits_{i=1}^{k_n}f_i=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(f_{k_i+1}+\cdots+f_{k_{i+1}})$，其中 $k_0=0$. 由 $\varphi_{k_n}\to f$, a.e. ,从而 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(f_{k_i+1}+\cdots+f_{k_{i+1}})$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛于 f.

例 14 设 $\{f_n\}$ 是 $[0,1]$ 上几乎处处收敛于 0 的可测函数列. 证明：存在数列 $\{t_n\}$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|t_n|=\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}|t_nf_n(x)|<\infty,\text{a.e.},x\in[a,b].$$

证 可设 $\{f_n\}$ 处处收敛于 0. 取正数列 $\{\varepsilon_k\}$，使得 $\sum\varepsilon_n<\infty$. 于

是，对任何k，有

$$[0,1]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:|f_m(x)|<\varepsilon_k,m\geqslant n\},$$

取一列整数$\{n_k\}$，使$\{n_k\}$单调增加，且

$$m([0,1])\backslash\{x:|f_m(x)|<\varepsilon_k,m\geqslant n_k\}<1/2^k.$$

因此，$m(\varliminf_{n\to\infty}\{x:|f_m(x)|<\varepsilon_k,m\geqslant n_k\})=1$. 当$n_k>n\geqslant n_{k-1}$时，令$t_n=1/(n_k-n_{k-1})$，

于是 $$\sum_n|t_n|=\sum_k\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}|t_n|=\sum_k 1=\infty,$$

而当$x\in\varliminf_{n\to\infty}\{x:|f_m(x)|<\varepsilon_k,m>n_k\}$时，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|t_kf_k(x)|=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}|t_nf_n(x)|<\sum_k\varepsilon_k<\infty,\text{a. e. },x\in[a,b].$$

例15 讨论下列问题：

(1)将鲁金定理中连续函数改多项式，定理是否仍然成立？

(2)将鲁金定理中的δ改为零，定理是否仍然成立？

解 (1)不再成立．设P为多项式，而函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1],\\0, & x\in[-1,0),\end{cases}$$

则至多在有限个点x，有$P(x)=1$或$P(x)=0$，从而$m(\{x:f\neq P\})=2$.

(2)不再成立．设g为连续函数，f同(1)，$m(\{x:f\neq g\})=0$. 取$\delta>0$，使$|x|<\delta$时有$|g(x)-g(0)|<1/4$. 于是，或者$\{x:f\neq g\}\supset(-\delta,0)$，或者$\{x:f\neq g\}\supset(0,\delta)$，前者发生于$g(0)\geqslant1/2$时，后者发生于$g(0)\leqslant1/2$时．从而$m(\{x:f\neq g\})>\delta$.

第四章　勒贝格积分

第一节　非负可测函数的积分

主 要 内 容

一、非负可测简单函数的积分

1. 设$f(x)$是$\mathbf{R}^n$上的非负可测简单函数，它在点集A_i $(i=1,2,\cdots,p)$上取值c_i：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{p}c_i\chi_{A_i}(x),\ \bigcup_{i=1}^{p}A_i=\mathbf{R}^n,\quad A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j).$$

若$E\in\mathscr{M}$，则定义f在E上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{p}c_i m(E\cap A_i).$$

积分号下的$\mathrm{d}x$是$\mathbf{R}^n$上勒贝格测度的标志(也记做$\mathrm{d}m$).

2. 积分的线性性质　设$f(x)$，$g(x)$是$\mathbf{R}^n$上的非负可测简单函数，f在点集A_i上取值a_i $(i=1,2,\cdots,p)$，g在点集B_j上取值b_j $(j=1,2,\cdots,q)$，$E\in\mathscr{M}$，则有

(1) 若c是非负常数，则$\int_E cf(x)\mathrm{d}x=c\int_E f(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_E[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x$.

3. 若$\{E_k\}$是$\mathbf{R}^n$中单调增加的可测集合列，$h(x)$是$\mathbf{R}^n$上的非负可测简单函数，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x,\quad E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k.$$

二、非负可测函数的积分

1. 设$f(x)$是E上的非负可测函数，定义f在E上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sup_{\substack{h(x)\leqslant f(x)\\ x\in E}}\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x : h(x)\text{是}\mathbf{R}^n\text{上的非负简单可测函数}\right\},$$

若$\int_E f(x)\mathrm{d}x<\infty$，则称$f(x)$在$E$上是可积的.

设$f(x),g(x)$是E上的非负可测函数，有：

(1) 若$f(x)\leqslant g(x)\ (x\in E)$，则$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x$；

(2) 若$F(x)$是E上非负可测函数，$f(x)\leqslant F(x)$，$x\in E$，则$f(x)$在E上可积；

(3) 若$A\subset E$，是可测子集，则

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x;$$

(4) 若$f(x)$在E上有界，且$m(E)<\infty$，则$f(x)$在E上可积.

2. 设$f(x)$是E上的非负可测函数，若c是非负的常数，则

$$\int_E cf(x)\mathrm{d}x=c\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

3. 列维(Levi)渐升列积分定理 设有定义在E上的非负可测函数列$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_k(x)\leqslant\cdots$，且有$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$，$x\in E$，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

4. 积分的线性性质 设$f(x),g(x)$是E上的非负可测函数，α,β是非负常数，则

$$\int_E[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

设$f(x),g(x)$是E上的非负可测函数，有

(1) 若$m(E)=0$，则$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$；

(2) 若$f(x)=g(x)$, a. e. ,则$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x$;

(3) $f(x)$在E上几乎处处有限.

5. 逐项积分定理　若$\{f_k(x)\}$是E上的非负可测函数列,则

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

设$E_k\in\mathscr{M}$ $(k=1,2,\cdots)$,$E_i\cap E_j=\varnothing$ $(i\neq j)$. 若$f(x)$是$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$上的非负可测函数,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

当$f(x)\equiv 1$时,上式即测度的可数可加性.

6. 法都(Fatou)引理　若$\{f_k(x)\}$是E上的非负可测函数列,则

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

7. 设$f(x)$是E上的几乎处处有限的非负可测函数,$m(E)<\infty$. 在$[0,\infty)$上作划分$0=y_0<y_1<\cdots<y_k<y_{k+1}<\cdots\to\infty$,其中$y_{k+1}-y_k<\delta$ $(k=0,1,\cdots)$. 若令

$$E_k=\{x\in E: y_k\leqslant f(x)<y_{k+1}\},k=0,1,\cdots,$$

则有
$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

疑 难 解 析

1. 勒贝格积分有什么特点?

答　勒贝格积分是在勒贝格测度理论的基础上建立起来的,勒贝格测度理论可以统一处理函数有界与无界的情形,而且函数可以定义在更一般的点集(不只是闭区间$[a,b]$)上. 它还提供了比黎曼积分更加广泛而有用的收敛定理.

引入勒贝格积分的目的是为了克服黎曼积分的不足,可以扩

大可积函数类，降低逐项积分的条件，降低交换积分顺序的条件.

2. 列维渐升列积分定理的意义是什么？

答 列维渐升列积分定理指出，对于非负渐升可测函数列，极限与积分的次序是可以交换的. 由于非负可测函数是渐升的非负可测简单函数列的极限，从而积分理论中的许多结果可直接从简单函数的积分性质得到.

方法、技巧与典型例题分析

非负可测简单函数的积分是勒贝格积分的最简单情形. 因此，必须十分熟悉与理解其概念，从可测简单函数与非负可测函数关系来了解非负可测函数的积分.

例 1 证明：若$h(x)$，$g(x)$是$\mathbf{R}^n$上的非负可测简单函数，h在点集A_i $(i=1,2,\cdots,p)$上取值a_i，g在点集B_j $(j=1,2,\cdots,q)$上取值b_j，$E\in\mathscr{M}$. 则

$$\int_E[h(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_E h(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为$h(x)+g(x)$在$A_i\cap B_i(\neq\varnothing)$上取值$a_i+b_j$，所以

$$\begin{aligned}
&\int_E[h(x)+g(x)]\mathrm{d}x\\
&=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)m(E\cap A_i\cap B_j)\\
&=\sum_{i=1}^{p}a_i\sum_{j=1}^{q}m(E\cap A_i\cap B_j)+\sum_{j=1}^{q}b_j\sum_{i=1}^{p}m(E\cap A_i\cap B_j)\\
&=\sum_{i=1}^{p}a_im(E\cap A_i)+\sum_{j=1}^{q}b_im(E\cap B_j)\\
&=\int_E h(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

例 2 设$f(x)$，$g(x)$是E上的非负可测函数. 证明：

(1) 若$f(x)\leqslant g(x)$，则$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x$，$(x\in E)$；

(2) 若 A 是 E 中子集，则$\int_A f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x$.

证 (1) 若用$h(x)$表示$\mathbf{R}^n$上的非负可测简单函数，且对$x\in E$，$h(x)\leqslant f(x)$，$h(x)\leqslant g(x)$，则由定义知

$$\int_E h(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

从而 $$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sup_{\substack{h(x)\leqslant f(x)\\x\in E}}\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x\right\}\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) $$\begin{aligned}\int_A f(x)\mathrm{d}x&=\sup_{\substack{h(x)\leqslant f(x)\\x\in E}}\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x\right\}=\sup_{\substack{h(x)\leqslant f(x)\chi_A(x)\\x\in E}}\left\{\int_A h(x)\mathrm{d}x\right\}\\&=\sup_{\substack{h(x)\leqslant f(x)\chi_A(x)\\x\in E}}\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x\right\}=\int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例3 设$m(E)<\infty$，f是E上的非负可测函数. 证明：f是E上可积函数的充要条件是$\sum\limits_{k=0}^{\infty}m(E_k)<\infty$，其中$E_k=\{x:f\geqslant k\}$.

证 因为$E_k\setminus E_{k+1}=\{x:k\leqslant f<k+1\}$，所以

$$k\cdot m(E_k\setminus E_{k+1})\leqslant\int_{E_k\setminus E_{k+1}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant(k+1)m(E_k\setminus E_{k+1}),$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot m(E_k\setminus E_{k+1})\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}km(E_k\setminus E_{k+1})+m(E).$$

即有$\int_E f(x)\mathrm{d}x<\infty$等价于$\sum\limits_{k=1}^{\infty}km(E_k\setminus E_{k+1})<\infty$. 又

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}km(E_k\setminus E_{k+1})&=\sum_{k=1}^{\infty}km(E_k)-\sum_{k=1}^{\infty}km(E_{k+1})\\&=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)m(E_k)-\sum_{k=1}^{\infty}km(E_{k+1})+\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k).\end{aligned}$$

所以，f 可积等价于 $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)<\infty$，而 $m(E)<\infty$，故又等价于 $\sum_{k=0}^{\infty} m(E_k)<\infty$.

例 4 设 f 是 E 上几乎处处大于零的可测函数，且满足 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明：$m(E)=0$.

证 若 $m(E)>0$，则因 $E=\{x:f\leqslant 0\}\cup(\bigcup_{n=0}^{\infty}\{x:f>0\})$，$m(\{x:f\leqslant 0\})=0$，故必存在 n，使 $m(\{x:f>n\})>0$，于是

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{\{x:f>n\}} f(x)\mathrm{d}x\geqslant n\cdot m(\{x:f>n\})>0,$$

推出矛盾. 故必有 $m(E)=0$.

例 5 设有 $[0,1]$ 上的非负可测函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ n, & 0<x<1/n, \quad n=1,2,\cdots,\\ 0, & 1/n\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

证明：法都引理成立.

证 因为，$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0, x\in[0,1]$，所以

$$\int_{[0,1]}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=0<1=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

例 6 在列维渐升列积分定理中，去掉函数列的非负性假定，结论是否成立？

解 不一定成立. 如在 $E=[0,1]$ 上定义

$$f_n(x)=\begin{cases}-1/(nx), & x\in(0,1],\\ 0, & x=0,\end{cases} \quad n=1,2,\cdots,$$

$$f(x)=0.$$

显然，$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$，$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$.

但是 $$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=-\infty, \quad n=1,2,\cdots,$$

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0.$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x\neq\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

例 7 证明:列维定理可以推广到$m(E)=\infty$的情形.

证 设$m(E)=\infty$,$\{f_n(x)\}$是E上的非负可测函数列,且$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$.

因为$f_n(x)\leqslant f(x)$,所以若有n使$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\infty$,则$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\infty$,命题成立. 故设所有$f_n(x)$都是可积的(见下节). 令$g_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)$, $n=1,2,\cdots$,则$\{g_n(x)\}$仍然是E上非负可测函数列且$f(x)=f_1(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n(x)$. 依逐项积分定理

$$\begin{aligned}&\int_E f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_E\left[f_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)\right]\mathrm{d}x=\int_E f_1(x)\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}x\\&=\int_E f_1(x)\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\int_E g_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f_1(x)\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_E\sum_{k=1}^{n-1}g_k(x)\mathrm{d}x\\&=\int_E f_1(x)\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_E[f_n(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

例8 设$f_n(x)\geqslant 0$,且$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$收敛于0. 证明:$f_n(x)$依测度收敛于0,但$f_n(x)$不一定几乎处处收敛于0.

证 先证$f_n(x)$依测度收敛于0. 任给$\sigma>0$,

$$\begin{aligned}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x&=\int_{\{x:f_n\geqslant\sigma\}}f_n(x)\mathrm{d}x+\int_{\{x:f_n<\sigma\}}f_n(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant\sigma\cdot m(\{x:f_n\geqslant\sigma\})\geqslant 0,\end{aligned}$$

由$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x\xrightarrow{n\to\infty}0$,得$m(\{x:f_n(x)\geqslant\sigma\})\xrightarrow{n\to\infty}0$,即$f_n(x)$依测

度收敛于0.

设有

$$f_i^{(k)}(x)=\begin{cases}1, & x\in[(i-1)/k,i/k),\\ 0, & x\overline{\in}[(i-1)/k,i/k)\end{cases}\quad (0\leqslant x<1).$$

令 $\varphi_n(x)=f_i^{(k)}(x)$ $(n=k(k-1)/2+i,k=1,2,\cdots;i=1,2,\cdots,k)$，则 $\varphi_n(x)\geqslant 0$，且当 $n\to\infty$ 时，必有 $k\to\infty$. 从而

$$\int_E\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_{(i-1)/k}^{i/k}\mathrm{d}x=1/k\to 0\quad (n\to\infty),$$

但已知 $\varphi_n(x)$ 在 $[0,1)$ 中处处不收敛于0.

例 9 若 $a_n\to 0$，证明：有非负可测函数列 $\{u_n(x)\}$ 使 $\sum_{k=1}^{\infty}a_n\int_E u_n(x)\mathrm{d}x<\infty$，但 $\{u_n(x)\}$ 在 E 中任何一点不收敛于0.

证 由题设知，存在 $n_k\in\mathbf{N}$，使 $|a_{n_k}|\leqslant 1/2^k(k=1,2,\cdots)$，在有界可测集 E 上作非负可测函数列：当 $n=n_k$ 时，$u_n(x)=1$；当 $n\neq n_k$ 时，$u_n(x)=0$. 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_E u_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n_k}\int_E u_n(x)\mathrm{d}x=m(E)\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k},$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\int_E u_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant m(E)\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n_k}|\leqslant m(E)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=m(E)<\infty.$$

但显然 $\{u_n(x)\}$ 在 E 上不收敛于0.

第二节 可测函数的积分

主要内容

一、积分的定义与初等性质

1. 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数. 若积分 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$，$\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 中至少一个是有限值，则称

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在 E 上的积分. 当上式右边两个积分值均为有限值时,称 $f(x)$ 在 E 上是可积的,或称 $f(x)$ 是 E 上的可积函数. E 上可积函数的全体记做 $L(E)$. $[a,b]$ 上的勒贝格积分记做 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x+\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

在 $f(x)$ 可测的条件下,$f(x)$ 的可积性与 $|f(x)|$ 的可积性是等价的,且

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

由定义知有下列事实:

(1) 若 $f\in L(E)$,则 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限;

(2) 若 $E\in\mu$,且 $f(x)=0$, a. e. ,$x\in E$,则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$;

(3) 若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数,$g\in L(E)$ 且 $|f(x)|\leqslant g(x)$ $(x\in E)$,则 $f\in L(E)$. ($g(x)$ 称为 $f(x)$ 的控制函数.)

由此可知,若 $f\in L(E)$,且 $g(x)=f(x)$,a. e. ,则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x$. 因此,改变一个函数在零测集上的值,不会影响该函数的可积性与积分值.

(4) 设 $f\in L(\mathbf{R}^n)$,则 $\lim\limits_{N\to\infty}\int_{|x|\geqslant N}|f(x)|\mathrm{d}x=0$. 即 $\forall\ x>0$,$\exists\ N\in\mathbf{N}$,使

$$\int_{|x|\geqslant N}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

2. 积分的线性性质　若 $f,g\in L(E)$,$c\in\mathbf{R}^1$,则

(1) $\int_E cf(x)\mathrm{d}x=c\int_E f(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_E [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x$.

关于函数的乘积，若 $f\in L(E)$，$g(x)$是 E 上的有界可测函数时，则 $f\cdot g\in L(E)$.

3. 积分的绝对连续性　若 $f\in L(E)$，则$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使当 E 中子集 e 的测度 $m(e)<\delta$ 时，

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_E|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

4. 设 $E_k\in\mu\ (k=1,2,\cdots)$，$E_i\cap E_j=\varnothing\ (i=j)$. 若 $f(x)$在 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 上可积，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

5. 积分变量的平移变换　若 $f\in L(\mathbf{R}^n)$，则对任意的 $y_0\in\mathbf{R}^n$，$f(x+y_0)\in L(\mathbf{R}^n)$，且有

$$\int_{\mathbf{R}^n}f(x+y_0)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\mathrm{d}x.$$

二、勒贝格控制收敛定理

1. 控制收敛定理　设 $f_k\in L(E)\ (k=1,2,\cdots)$，且有$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$, a.e., $x\in E$. 若存在E 上的可积函数$F(x)$，使得$|f_k(x)|\leqslant F(x)$, a.e., $x\in E$, $k=1,2,\cdots$，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

$F(x)$称为函数列$\{f_k(x)\}$的控制函数.

2. 逐项积分定理　设 $f_k\in L(E)\ (k=1,2,\cdots)$. 若有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_E|f_k(x)|\mathrm{d}x<\infty$，则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$在$E$ 上几乎处处收敛. 若记其和函数为 $f(x)$，则$f\in L(E)$且有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

3. 积分号下求导定理　设 $f(x,y)$是定义在 $E\times(a,b)$上的函数，作为x 的函数f 在E 上是可积的，作为y 的函数f 在(a,b)上是

可微的. 若存在$F\in L(E)$,使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y)\right|\leqslant F(x),\ (x,y)\in E\times(a,b).$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_E f(x,y)\mathrm{d}x=\int_E\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

4. 几乎处处收敛函数列的控制收敛定理 设$\{f_n\}$是E上一列可测函数,F是它的控制函数,且是可积的. 又设$\{f_n\}$几乎处处收敛于可测函数f,则f在E上必可积,且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

5. 有界控制收敛定理 设$m(E)<\infty$,$\{f_n\}$是E上的一列可测函数,且存在常数K,使得$|f_n|\leqslant K$, a.e. , $n=1,2,\cdots$. 若$\{f_n\}$在E上几乎处处(或依测度)收敛于可测函数f,则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

6. 列维定理 设$\{f_n\}$是E上可积函数的单调增加序列,且它的积分序列有上界,则$\{f_n\}$必然几乎处处收敛于一个可积函数f,且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

设$\{f_n\}$是E上可积函数的单调减少序列,且它的积分序列有下界,则$\{f_n\}$必然几乎处处收敛于一个可积函数f,且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

上节的列维渐升列积分定理是列维定理的特例.

7. 列维定理的级数形式 设$\{u_n\}$是E上一个非负可积函数序列,且$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_n(x)\mathrm{d}x<\infty$,则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$必然几乎处处收敛于$E$上的一个可积函数$f$,且有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_n(x)\mathrm{d}x.$$

8. 法都定理　设$\{f_n\}$是E上一列可积函数，若有E上一可积函数h，使得$f_n \geqslant h$，a.e.，$n=1,2,\cdots$. 且有$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x<\infty$，则函数$\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$是$E$上的可积函数，且有

$$\int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

设$\{f_n\}$是E上一列可积函数，若有E上一可积函数h，使得$f_n \leqslant h$，a.e.，$n=1,2,\cdots$. 且有$\overline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x>-\infty$，则函数$\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$是$E$上的可积函数，且有

$$\int_E \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

疑难解析

1. 用分割方法怎样定义勒贝格积分？

答　在数学分析中，是用分割方法来定义黎曼积分的，同样可以用分割方法来定义勒贝格积分.

设E是可测集，$m(E)<\infty$，f是定义在E上的可测函数. 又设f是有界的，即存在有限实数A,B，使得$\{f(x):x\in E\}\subset(A,B)$，在$[A,B]$中任取一分点组$D$：$A=y_0<y_1<\cdots<y_m=B$，记$\delta(D)=\max_k(y_k-y_{k-1})$，$E_k=\{x:y_{k-1}\leqslant f<y_k\}$. 任取$\xi_k\in[y_{k-1},y_k]$，作和式$S(D)=\sum_{k=1}^{m}\xi_k m(E_k)$，称为$f$在分点组$D$下的一个"勒贝格和".

如果存在有限实数S，满足$S=\lim_{\delta(D)\to 0}S(D)$，即满足：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得对任何分点组$D$，当$\delta(D)<\delta$时，必有$|S(D)-S|<\varepsilon$. 这时，称$f$在$E$上是勒贝格可积的，并称$S$是$f$在$E$上的勒贝格积分，记做

$$S=(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x,\quad 简记为\quad \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

当$E=[a,b]$时，也记做$(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$或$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

用分割方法定义勒贝格积分显然比本节的定义要复杂得多，本节的定义是利用两个非负可测函数的积分给出的. 因为，若f是E上的可测（实）函数，作函数$f^+=\max\{f,0\}$，$f^-=\max\{-f,0\}$，则f^+和f^-是由f产生的两个非负（实）可测函数，分别称为f的正部与负部. 当$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$和$\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$分别为有限值时（称f^+和f^-分别勒贝格可积），称f是勒贝格可积，并定义f在E上的勒贝格积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x.$$

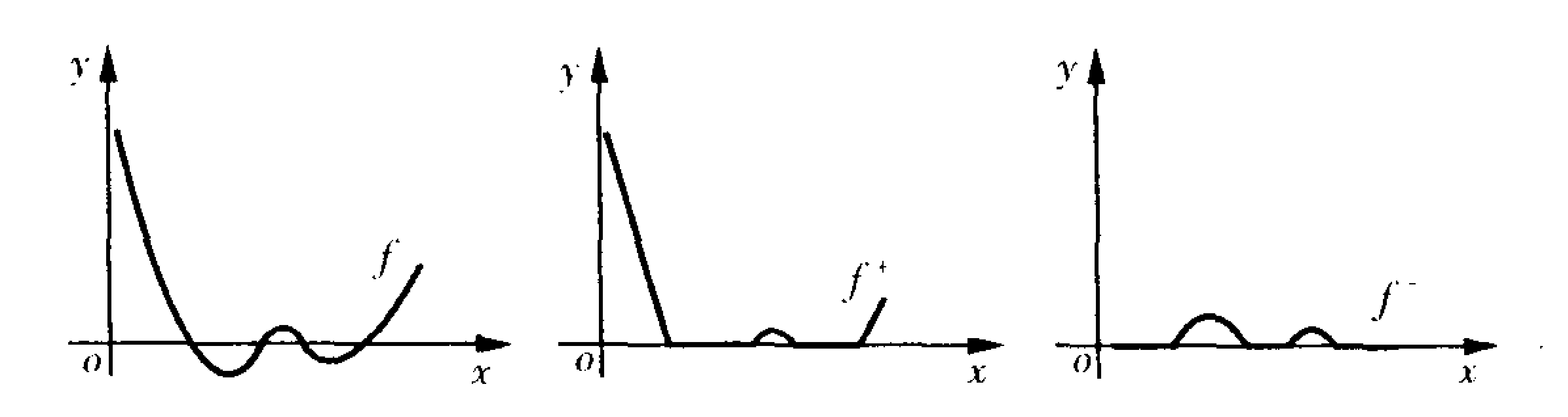


图 4.1

2. 在广义黎曼积分中是否有勒贝格积分的绝对可积性?

答 在勒贝格积分中，若f在E上可积，则$|f|$在E上可积，且

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

因为f可积，f^+和f^-均可积，故$|f|=f^++f^-$也可积，由于$-|f|\leqslant f\leqslant|f|$，所以

$$-\int_E |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

即
$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|<\int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

但广义黎曼积分中不存在绝对可积性. 如

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x<1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

是广义黎曼可积函数，但$|f|$不是广义黎曼可积的. 应注意，f在$[0,1]$上的勒贝格积分不存在. 用反证法，设f是勒贝格可积，则由绝对可积性与$\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|$在$\left[\frac{1}{n},1\right]$上黎曼可积，有

$$(L)\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant(L)\int_{1/n}^1|f(x)|\mathrm{d}x$$
$$=(R)\int_{1/n}^1\frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x\xrightarrow{n\to\infty}\infty.$$

即$|f|$不勒贝格可积，因而f不勒贝格可积.

方法、技巧与典型例题分析

本节的内容比较多，因而题目的类型也比较多. 但总的来说，真正理解了概念，则解题也不会感到特别的困难. 本节主要题型还是命题证明，利用本节的定义、定理和性质，并结合以前学过的知识来讨论函数的可积性、可积条件及勒贝格积分的有关等式与不等式. 方法与技巧表现为如何理解命题的条件，用最简捷、最合理的方式予以证明. 而这决非一日之功，有待于读者通过解题和观察例题逐渐领会. 本节开始引入了勒贝格积分的一些计算题，读者要学会如何选取控制函数并应用控制收敛定理.

一、可测函数的积分概念

例 1 设E是勒贝格可测集，$m(E)<\infty$，f是E上的可测函数. 证明：f是E上可积函数的充要条件是$\sum_{k=1}^{\infty}km(E_k)<\infty$. 其中$E_k=\{x:k\leqslant|f|<k+1\}$.

证 因为对于可测函数，可积与绝对可积是一致的. 设f是非负可测函数，则对题设的E_k，成立不等式

$$k\cdot m(E_k)\leqslant\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\leqslant(k+1)m(E_k),$$

在每个E_k上，f有界，从而可积. 由可列可加性知，f在E上可积的充要条件是$\sum_{k=0}^{\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x<\infty$. 由前面的不等式与$m(E)=$

$\sum_{k=0}^{\infty} m(E_k)$，得

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot m(E_k) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)m(E_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} km(E_k) + m(E).$$

所以 $\sum_{k=0}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x < \infty$ 等价于 $\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot m(E_k) < \infty$.

例 2 设 $[a,b]$ 上函数 f 几乎处处具有导数，且 f' 在 $[a,b]$ 上有界. 证明：f' 是 $[a,b]$ 上的可积函数.

证 因为 f 几乎处处有导数，所以 f 几乎处处连续. 对任何实数 c，当 x_0 为 $\{x:f>c\}$ 中的点，且 f 在 x_0 连续时，x_0 是 $\{x:f>c\}$ 的内点，则 $\{x:f>c\}$ 必为某开集与一零集的并，所以是可测集，故 f 是可测函数.

考察函数 $F_n(x)=n[f(x+1/n)-f(x)]$，其中 $f(x)=f(b)$，$x\in[b,b+1)$，则 F_n 是可测函数，且 F_n 几乎处处收敛于 f'，所以 f' 是可测函数. 由于 f' 有界，所以 f' 是可积的.

例 3 设 $m(E)<\infty$，证明：E 上一切有界可测函数必可积.

证 如疑难解析 1，对 $[A,B]$ 作分点组 D，分别称 $\overline{S}(D)=\sum_{k=1}^{m} y_k m(E_k)$ 和 $\underline{S}(D)=\sum_{k=1}^{m} y_{k-1} m(E_k)$ 为函数 f 在分点组 D 下的大和与小和，并取 $\underline{S}=\sup_D \underline{S}(D)$，$\overline{S}=\inf_D \overline{S}(D)$. 显然 $\underline{S}\leqslant\overline{S}$. 又由

$$\underline{S}(D)\leqslant\underline{S}\leqslant\overline{S}\leqslant\overline{S}(D),$$

得
$$0\leqslant\overline{S}-\underline{S}\leqslant\overline{S}(D)-\underline{S}(D)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(y_k-y_{k-1})m(E_k)\leqslant\delta(D)m(E).$$

令 $\delta(D)=\max_k(y_k-y_{k-1})\to 0$，即证得 $\underline{S}=\overline{S}$.

记 $S=\underline{S}=\overline{S}$，现证 $S=\lim_{\delta(D)\to 0} S(D)$. 因为，$\forall\ \varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon/[m(E)+1]$，则对任何分点组 D，当 $\delta(D)<\delta$ 时，由上面所证各

式可得

$$|S(D)-S|\leqslant\overline{S}(D)-\underline{S}(D)\leqslant\delta(D)m(E)<\varepsilon.$$

从而知 f 是可积的.

本例的结果:测度有限的可测集 E 上的一切有界可测函数都是勒贝格可积的,是勒贝格积分理论的基本结果之一. 对于证明命题是十分有用的. 上面的例1 与例2 中实际上都用到了这一结果.

例 4 若有界函数 $f(x)$ 在集 E 上勒贝格可积,则函数 $[f(x)]^2,|f(x)|,1/f(x)$ 在集 E 上是否勒贝格可积?

解 由题设知,$f(x)$ 在 E 上有界可测. 依可测函数的性质 $[f(x)]^2,|f(x)|$ 在集合 E 上也有界可测,所以 $[f(x)]^2,|f(x)|$ 在集 E 上勒贝格可积.

但是 $1/f(x)$ 不一定勒贝格可积. 因为即使 $1/f(x)$ 可测,仍然可能 $1/f(x)$ 无界,也就可能是不可积的. 例如 $(0,1)$ 上的函数 $f(x)=x^2$,是有界可测函数,但 $1/f(x)=1/x^2$ 在 $(0,1)$ 上无界,且勒贝格不可积.

例 5 设在 $[0,1]$ 上有 n 个可测集 $E_1,E_2,\cdots,E_n$. 如果 $[0,1]$ 中每一个点至少属于这 n 个集中的 q 个集,证明:$E_1,E_2,\cdots,E_n$ 中至少有一集的测度不小于 q/n.

证 用 χ_{E_i} 记 $[0,1]$ 中可测集 E_i 的特征函数,是有界可测的. 对任一 $x\in[0,1]$,由于它属于 q 个 E_i,故有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_{E_i}(x)\geqslant q$. 因此

$$\int_0^1\Big(\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i}(x)\Big)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 q\mathrm{d}x=q.$$

又
$$\int_0^1\Big(\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i}(x)\Big)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\chi_{E_i}\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}m(E_i),$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n}m(E_i)=q.$$

从而知,若对 $i=1,2,\cdots,n$,均有 $m(E_i)<q/n$,则必有 $\sum\limits_{i=1}^{n}m(E_i)\leqslant$

q，与前面所证矛盾. 故各 E_i 中至少有一个满足 $m(E_i)\geqslant q/n$.

例 6 设 f 是 $[a,b]$ 上的勒贝格可积函数，若对 $c\in[a,b]$，均有 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明：$f$ 几乎处处等于 0.

证 由题设知，取任意区间 $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$，则

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x=\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x-\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x=0,$$

因 $f(x)\in L[a,b]$，由积分连续性，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得任一 $e\subset[a,b]$，当 $m(e)<\delta$ 时，

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

对任一可测集 $E\subset(a,b)$，存在开集 G，使 $E\subset G\subset(a,b)$，且 $m(G\setminus A)<\delta$，从而

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_G f(x)\mathrm{d}x-\int_{G\setminus E} f(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$=\left|-\int_{G\setminus E} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$. 特别地

$$\int_{\{x:f>0\}} f(x)\mathrm{d}x=0,\int_{\{x:f<0\}} f(x)\mathrm{d}x=0.$$

所以，f 几乎处处等于零.

例 7 若积分 $\int_E\varphi(x)f(x)\mathrm{d}x$ 对任何可积函数 f 存在，证明：E 上的可测函数 φ 在 E 上几乎处处有界.

证 设 $m(E)<\infty$，$\varphi\geqslant0$. 否则，可取 E 的一个测度有限的单调覆盖，并考察 $|g|$ 即可.

用反证法. 设 φ 不是几乎处处有界，取 $E_n=\{x:2^{n-1}\leqslant\varphi<2^n\}$，则存在无穷序列 $n_1<n_2<\cdots$，使得 $m(E_{n_k})>0$，$k=1,2,\cdots$. 令

$$f(x)=\begin{cases}1/[2^{n_k}\cdot m(E_{n_k})], & x\in E_{n_k},\\ 0, & x\overline{\in}\bigcup_{k=1}^{\infty}E_{n_k}\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots).$$

则
$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_{n_k}} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n_k}}<\infty.$$
即 f 是 E 上的可积函数．但对任何整数 m，有
$$\left|\int_E g(x)f(x)\mathrm{d}x\right|\geqslant\sum_{k=1}^{m}\int_{E_{n_k}} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$
$$\geqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{2^{n_k-1}\cdot m(E_{n_k})}{2^{n_k}\cdot m(E_{n_k})}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2}=\frac{m}{2}.$$
由 m 的任意性，知 $f\cdot\varphi$ 是不可积的，推出矛盾．从而 φ 在 E 上几乎处处有界．

二、勒贝格控制收敛定理及应用

例 8 证明：关系式 $\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\mathrm{d}x$ 收敛于零与 $f_n(x)$ 依测度收敛于 0 是等价的．

证 由函数 $y=\frac{x}{1+x}$ 当 $x>-1$ 时严格单调增加知，$\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\geqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}$ 的充要条件是 $|f_n|\geqslant\sigma$．故
$$\left\{x:\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\geqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}\right\}=\{x:|f_n|\geqslant\sigma\},$$
推知：当 $n\to\infty$ 时，$\frac{|f_n|}{1+|f_n|}$ 依测度收敛于零的充要条件是 $f_n(x)$ 依测度收敛于零．

若 $\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\mathrm{d}x\xrightarrow{n\to\infty}0$，则依上节例 8，必有 $\frac{|f_n|}{1+|f_n|}$ 依测度收敛于零，从而 $f_n(x)$ 依测度收敛于零．反之，若 $f_n(x)$ 依测度收敛于零，必有式 $\frac{|f_n|}{1+|f_n|}$ 依测度收敛于零．

又 $0\leqslant\frac{|f_n|}{1+|f_n|}<1\ (n=1,2,\cdots)$，依勒贝格控制收敛定理得
$$\lim_{n\to\infty}\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\mathrm{d}x=\int_E 0\mathrm{d}x=0.$$

例 9 设 $f(x)$ 是 E 上的非负有界可测函数，$m(\{x:f(x)\geqslant c\})$

$=a$. 证明：$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant ac$.

证 因为$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$，从而

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_{\{x: f(x) \geqslant c\}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\{x: f(x) < c\}} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_{\{x: f(x) \geqslant c\}} f(x)\mathrm{d}x \geqslant c \cdot m(\{x: f(x) \geqslant c\}) = ca.$$

例 10 设 f 是 $\mathbf{R}^1$ 上的可测函数，证明：对任何正数 ε，有

$$m(\{x: |f(x)| \geqslant \varepsilon\}) < \infty.$$

证 由绝对可积性知，f 可积时，$|f|$ 也可积，所以$\forall\ \varepsilon > 0$，有

$$\int_{\mathbf{R}^1} |f(x)|\mathrm{d}x \geqslant \int_{\{x: |f| \geqslant \varepsilon\}} |f(x)|\mathrm{d}x \geqslant \varepsilon \cdot m(\{x: |f(x)| \geqslant \varepsilon\}),$$

于是$m(\{x: |f(x)| \geqslant \varepsilon\}) < \infty$.

例 11 设 f 是 $E=[a,b]$上的非负可测函数，证明：

$$\int_E [f(x)]_{2n}\mathrm{d}x - \int_E [f(x)]_n \mathrm{d}x \to 0$$

的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot m(\{x: x \in [a,b], f(x) > n\}) = 0$.（这里 f 是一个实函数，N 为任一非负实数. $[f]_N$ 表示$\max(\min(f(x), N))$. 即在$|f(x)| \leqslant N$ 的点 x 上，其函数值为 $f(x)$；在$|f(x)| > N$ 的点 x 上，其函数值为N 或$-N$.）

证 记$I_n = \int_E [f]_{2n}\mathrm{d}x - \int_E [f]_n \mathrm{d}x = \int_{(f>n)} ([f]_{2n} - n)\mathrm{d}x$,

故有 $$I_n \leqslant \int_{(f>n)} (2n - n)\mathrm{d}x = n \cdot m(\{x: f > n\}),$$

又有 $$I_n \geqslant \int_{(f>2n)} ([f]_{2n} - n)\mathrm{d}x = n \cdot m(\{x: f > 2n\})$$

$$= [2n \cdot m(\{x: f > 2n\})]/2.$$

因此，$n \cdot m(\{x: f > n\})$时，$I_n \to 0$. 而当 $I_n \to 0$ 时，$2n \cdot m(\{x: f > 2n\}) \to 0$. 再注意到

$$2n \cdot m(\{x: f > 2n\}) \geqslant (2n+1)/2 \cdot m(\{x: f > 2n+1\}),$$

所以又有

$$(2n+1)\cdot m(\{x:f>2n+1\})\to 0.$$

综上即知，当$I_n\to 0$时，$n\cdot m(\{x:f>n\})\to 0$.

例 12 设f是$[a,b]$上的可积函数. 证明：对任何$\varepsilon>0$，存在$[a,b]$上的连续函数$\varphi(x)$，使得

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

证 对$n\in\mathbf{N}$，有

$$\int_a^b |f(x)-[f]_n(x)\mathrm{d}x|\leqslant\int_{\{x:|f|>n\}}(|f(x)|+n)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2\int_{\{x:|f|>n\}}|f(x)|\mathrm{d}x,$$

由可积函数的积分连续性，$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当$m(e)<\delta$时，有$\int_e |f(x)|<\varepsilon/4$.

因为$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x:|f|>n\}=\varnothing$，所以存在$N$，使得$m(\{x:|f|>N\})<\delta$. 对于$[f]_N$，利用鲁金定理，取$\varphi\in[a,b]$，使$m(\{x:[f]_N\neq\varphi\})<\varepsilon/(4N)$，且$|\varphi(x)|\leqslant N$. 这样，有

$$\int_a^b |[f]_N(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x=\int_{\{x:[f]_N\neq\varphi\}}|[f]_N(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2N\cdot m(\{x:[f]_N\neq\varphi\})<\varepsilon/2.$$

综上即得

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^b |f(x)-[f]_N(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b |[f]_N(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2\int_{\{x:|f|>N\}}|f(x)|\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2}<2\cdot\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

例 13 设f是$(a-\delta,b+\delta)$上的可积函数. 证明

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

证 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，利用上例结果，取$\varphi\in C[a-\delta,b+\delta]$，使得

$$\int_{a-\delta}^{b+\delta}|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}.$$

再由φ在$[a-\delta,b+\delta]$上的一致连续性,可选取适当的$\eta>0$ ($\eta<\delta$),使得当$|h|<\eta$时,有$|\varphi(x+h)-\varphi(x)|<\varepsilon/[3(b-a)]$,$\forall\ x\in[a,b]$. 这样,当$|h|<\eta$时,有

$$\begin{aligned}&\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x\\ \leqslant&\int_a^b|f(x+h)-\varphi(x+h)|\mathrm{d}x+\int_a^b|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\mathrm{d}x\\ &+\int_a^b|\varphi(x)-f(x)|\mathrm{d}x\\ <&\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.\end{aligned}$$

即
$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

例 14 设f是$[a,b]$上的可积函数,且$f>0$. $0<q\leqslant b-a$. 记$r=\{E:E\subset[a,b],m(E)\geqslant q\}$. 证明:

$$\inf\left\{\int_E f(x)\mathrm{d}x:E\in r\right\}>0.$$

证 因为$f>0$,显然$\inf\left\{\int_E f(x)\mathrm{d}x:E\in r\right\}\geqslant 0$.

用反证法. 设下确界为零,则对任何$k\in\mathbf{N}$,存在$E_k\in r$,使得$\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x<1/2^k$.

记$E_0=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k$,则$m(E_0)=\lim\limits_{n\to\infty}m(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k)\geqslant q>0$,对任何$n$,有

$$\int_{E_0}f\mathrm{d}x\leqslant\int_{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k}f\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\int_{E_k}f\mathrm{d}x<\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

令$n\to\infty$,得$\int_{E_0}f\mathrm{d}x=0$,与$m(E_0)>0$及$f>0$矛盾.

例 15 设$m(E)<\infty$,$f(x)$是E上非负可测函数,

$$\{f(x)\}_n=\begin{cases}f(x), & 当 f(x)\leqslant n 时,\\ n, & 当 f(x)>n 时.\end{cases}$$

证明：
$$\lim_{n\to\infty}\int_E\{f(x)\}_n\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证 令 $f_n(x)=\{f(x)\}_n$，则 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. 因为对每个 n，$f_n(x)$ 是有界非负可测函数，则依有界控制收敛定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\int_E\{f(x)\}_n\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

注意 本例中 $m(E)<\infty$. 但是，在 $m(E)=\infty$ 时，勒贝格控制收敛定理与列维定理依然成立，故仍可利用它们来证明命题.

例16 设 f 是 $[a,b]$ 上的可测函数，$q>1$. 证明：若对任何满足 $|h|^q$ 可积的可测函数 h，fh 都可积，则 $|f|^p$ 必可积（p 满足 $1/p+1/q=1$).

证 用反证法. 设 $\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x=\infty$，则显然存在一列单调增加的自然数 $\{n_k\}$，使得 $\int_{(n_k\leqslant|f|^p<n_{k+1})}|f(x)|^p\mathrm{d}x\geqslant 1$. 记 $E_n=\{x:n_k\leqslant|f|^p<n_{k+1}\}$，构造

$$h(x)=\begin{cases}|f(x)|^{p-1}\mathrm{sign}f(x)\Big/\left[k\int_{E_k}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right], & x\in E_k,\\ 0, & x\overline{\in}\bigcup\limits_k E_k,\end{cases}$$

则有
$$\begin{aligned}&\int_a^b|h(x)|^q\mathrm{d}x\\ &=\sum_k\int_{E_k}|h(x)|^q\mathrm{d}x\\ &=\sum_k\left\{\left(\int_{E_k}|f(x)|^{q(p-1)}\mathrm{d}x\right)\Big/\left[k^q\left(\int_{E_k}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^q\right]\right\}\\ &=\sum_k\left\{1\Big/\left[k^q\left(\int_{E_k}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{q-1}\right]\right\}\leqslant\sum_k\frac{1}{k^q}<\infty,\end{aligned}$$

即 $|h|^q$ 可积. 但是

$$\int_a^b (fh)(x)\mathrm{d}x=\sum_k\int_{E_k}\frac{|f(x)|^p\mathrm{d}x}{k\int_{E_k}|f(x)|^p\mathrm{d}x}=\sum_k\frac{1}{k}=\infty,$$

知 fh 不可积，得出矛盾.

例 17 设 f 是 E 上的非负可积函数，对任何 $n\in\mathbf{N}$，$m(\{x:f>n\})>0$. 证明：存在可积函数 g，使 fg 不可积.

证 记 $E_n=\{x:n\leqslant f<n+1\}$. 因为对 $n\in\mathbf{N}$，$\sum_{k=n}^{\infty}m(E_k)>0$，故必能取得一列单调增加的子列 $\{n_k\}$（$n_k\in\mathbf{N}$），使 $m(E_{n_k})>0$. 作

$$g(x)=\begin{cases}1/[k^2m(E_{n_k})], & x\in E_{n_k},\\ 0, & x\overline{\in}\bigcup_k E_{n_k}\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots),$$

于是，g 为可积函数，且 $\int_E g(x)\mathrm{d}x=\sum_k\frac{1}{k^2}$，但是

$$\sum_k\int_{E_{n_k}}fg\mathrm{d}x>\sum_k\frac{n_k}{k^2}>\sum_k\frac{1}{k}=\infty.$$

例 18 设 f 是 E 上的有界可测函数，且存在 $M>0$，$\alpha<1$，使得对任何 $\lambda>0$，有 $m(\{x:x\in E,|f(x)|>\lambda\})<M/\lambda^{\alpha}$. 证明：$f$ 是 E 上的可积函数.

证 因为 $|f|\leqslant L$（常数），$m(\{x:|f(x)|>1\})<M$，所以 $\int_{\{x:|f|>1\}}|f|\mathrm{d}x\leqslant L\cdot M$. 故只需证 $\int_{\{x:|f|<1\}}|f|\mathrm{d}x<\infty$ 即可. 由

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\left\{x:\frac{1}{n+1}<|f|<\frac{1}{|n|}\right\}}|f|\mathrm{d}x\\ &\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\left\{x:|f|>\frac{1}{n+1}\right\}}-\int_{\left\{x:|f|>\frac{1}{n}\right\}}\right)\frac{1}{n}\mathrm{d}x\\ &=-\int_{\{x:|f|>1\}}1\mathrm{d}x+\int_{\{x:|f|>1/2\}}\left(1-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_{\{x:|f|>1/3\}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x+\cdots\\ &=-\int_{\{x:|f|>1\}}1\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{M}{(n+1)^{-\alpha}}\end{aligned}$$

$$=-m(\{x:|f|>1\})+M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^{1-\alpha}}<\infty.$$

从而知 f 是 E 上的可积函数.

例19 设 $g(x)$ 是 E 上的可测函数，若对任意的 $f\in L(E)$，都有 $f\cdot g\in L(E)$. 证明：除一个零测集外，$g(x)$ 是有界函数.

证 用反证法. 设结论不成立，则必有 $\{k_i\}$，$k_i\in\mathbf{N}$，使得

$$m(\{x:k_i\leqslant|g(x)|<k_{i+1}\})=m(E_i)>0,\ i=1,2,\cdots$$

作函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sgn} g(x)}{i^{1+(1/2)}\cdot m(E_i)}, & x\in E_i,\\ 0, & x\overline{\in} E_i\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots),$$

因为
$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|f(x)|\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{1+(1/2)}\cdot m(E_i)}m(E_i)<\infty,$$

所以，$f\in L(E)$，但是

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k_i}{i^{1+(1/2)}\cdot m(E_i)}m(E_i)=\infty.$$

即 $f\cdot g\overline{\in}L(E)$. 与假设矛盾.

例20 用依测度收敛代替几乎处处收敛证明勒贝格控制收敛定理.

证 注意到：$|f(x)|\leqslant F(x)$，$|f_k(x)|\leqslant F(x)$，$k=1,2,\cdots$. 则 $\forall\ \varepsilon>0$ 与 $\sigma>0$，$\exists\ N$ 与 $\delta>0$，使得当 $k>N_1$，$m(e)<\delta$ 时，有

$$\int_e|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon/3,$$

$$I_1=\int_{E\setminus B(0,N)}|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon/3,$$

$$m(e')=m(\{x\in E\cap B(0,N):|f_k(x)-f(x)|>\sigma\})<\delta.$$

所以
$$\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=I_1+\int_{e'}|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$+\int_{(E\cap B(0,N)\setminus e')}|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$
$$<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.$$

例21 设$m(E)<\infty$，$\{f_n(x)\}$是E上的一列非负可测函数，且$f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，a.e.. 证明：当$\{f_n(x)\}$中至少已知一个为可积时，有$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$.

证 设$f_N(x)$为可积函数，$\{f_n(x)\}$在E上处处收敛于$f(x)$，考虑函数列

$$f_N(x)\geqslant f_{N+1}(x)\geqslant\cdots\geqslant f_{N+n}(x)\geqslant\cdots, \qquad ①$$

令
$$g_n(x)=f_N(x)-f_{N+n}(x),\ n=1,2,\cdots,$$

则$g_n(x)$是E上的非负可测函数列，且

$$g_1(x)\leqslant g_2(x)\leqslant\cdots\leqslant g_n(x)\leqslant\cdots,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\int_E(f_N(x)-f_{N+n}(x))\mathrm{d}x=\int_E(f_N(x)-f(x))\mathrm{d}x. \qquad ②$$

因为$f_N(x)$可积及由式①知$f(x)$可积，所以

$$\int_E f_N(x)\mathrm{d}x<\infty,\quad \int_E f(x)\mathrm{d}x<\infty.$$

故由式②消去$\int_E f_N(x)$后，即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_{N+n}(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

例22 设$f_1,f_2,\cdots$都是E上的非负可积函数，且$\{f_n\}$在E上依测度收敛于f，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$. 证明：对$E$的任何可测子集$A$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\mathrm{d}x=\int_A f(x)\mathrm{d}x$.

证 考察函数列$\{(f-f_k)^+\}$. 由于f与f_k都是非负函数，故$(f-f_k)^+(x)\leqslant f(x)$，$x\in E$. 因此$f$是$\{(f-f_k)^+\}$的控制函数. 因为$\{f_n\}$在$E$上依测度收敛于$f$，所以$\{(f-f_k)^+\}$在$E$上依测度收敛

于0. 于是，由控制收敛定理得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E (f-f_k)^+(x)\mathrm{d}x=0.$$

再利用$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$，得$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E (f-f_k)^-(x)\mathrm{d}x=0$.

由于$A\subset E$，$\{(f-f_k)^+\}$与$\{(f-f_k)^-\}$都是非负函数列，故有

$$0\leqslant\int_A (f-f_k)^{\pm}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E (f-f_k)^{\pm}(x)\mathrm{d}x\to 0,$$

从而 $$\lim_{k\to\infty}\int_A (f-f_k)(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_A (f-f_k)^+(x)\mathrm{d}x-\lim_{k\to\infty}\int_A (f-f_k)^-(x)\mathrm{d}x=0.$$

例23 计算积分与极限：

(1) $\lim\limits_{m\to\infty}(L)\int_0^1 \dfrac{mx}{1+m^2x^2}\sin mx\mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^1 \dfrac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x$；　　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int_0^1 \dfrac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int_0^{\infty} \dfrac{1}{(1+x/n)^n x^{1/n}}\mathrm{d}x$.

解 计算勒贝格积分和勒贝格积分的极限，通常要用到勒贝格控制收敛定理与列维定理，关键是找出相应的收敛函数.

(1) 因为$f_m(x)=\dfrac{mx}{1+m^2x^2}\sin mx$ $(m\to\infty)$在$[0,1]$上处处收敛于0，又因为$(1-mx)^2=1-2mx+m^2x^2\geqslant 0$，所以$1+m^2x^2\geqslant 2mx$，且

$$\left|\frac{mx}{1+m^2x^2}\sin mx\right|\leqslant\left|\frac{mx}{1+m^2x^2}\right|\leqslant\left|\frac{mx}{2mx}\right|=\frac{1}{2}.$$

依勒贝格控制收敛定理，有

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_0^1 \frac{mx}{1+m^2x^2}\sin mx\mathrm{d}x=\int_0^1 0\mathrm{d}x=0.$$

(2) 因为，当$0<x<1$时，有

$$\frac{\ln(1-x)}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^n}{n}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}.$$

令 $u_n(x)=x^{n-1}/n$，则

$$-\frac{\ln(1-x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x).$$

由于 u_n 是 $[0,1]$ 上非负可积函数，且 $\int_0^1 u_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)\mathrm{d}x<\infty$. 由列维定理知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是可积的，有

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)\mathrm{d}x.$$

即 $\frac{\ln(1-x)}{x}$ 可积，且有

$$\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

(3) $f_n(x)=n\sqrt{x}/(1+n^2x^2)$ 是 $(0,1)$ 上的连续函数，且为非负可测函数列. 因为 $1+n^2x^2\geqslant 2nx$，所以 $|f_n(x)|\leqslant 1/(2\sqrt{x})$，令 $F(x)=1/(2\sqrt{x})$，则 $F(x)$ 是 $(0,1)$ 上的一个非负可测函数. 由于

$$\begin{aligned}(L)\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x&=\lim_{N\to\infty}(L)\int_0^1\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}}\right\}_N\mathrm{d}x\\&=\lim_{N\to\infty}\left[\int_0^{1/(4N^2)}N\mathrm{d}x+\int_{1/(4N^2)}^1\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right]=1,\end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上勒贝格可积，故由勒贝格控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_0^1\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=(L)\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=(L)\int_0^1 0\mathrm{d}x=0.$$

(4) 取 $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}x^{-1/n}$. 显然，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\mathrm{e}^{-x}$. 寻找 $\{f_n\}$ 的控制函数，可知

在 $(0,1)$ 上，$|f_n(x)|\leqslant 1/\sqrt{x}$，$n\geqslant 2$.

在 $(1,\infty)$ 上，$|f_n(x)|\leqslant(1+x/n)^{-n}\leqslant(1+x/2)^{-2}$，$n\geqslant 2$.

而 $1/\sqrt{x}$ 与 $(1+x/2)^{-2}$ 分别是 $(0,1)$ 与 $[1,\infty)$ 上的可积函数，可以作为 $\{f_n\}_2^{\infty}$ 的控制函数. 于是，令

$$F(x)=\begin{cases}1/\sqrt{x}, & 0<x<1,\\(1+x/2)^{-2}, & 1\leqslant x<\infty,\end{cases}$$

则 f_n 和 F 均为 $(0,\infty)$ 上的可积函数，且当 $n\geqslant 2$ 时，有 $|f_n(x)|\leqslant F(x)$，从而依勒贝格控制收敛定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^\infty \lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1.$$

例 24 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{1+nx}{(1+x)^n}\mathrm{d}x$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^\infty\dfrac{n^2x\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x, a\geqslant 0.$

解 首先是找出控制函数，然后利用控制收敛定理求解.

(1) $\int_0^n\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\int_a^\infty\chi_{[0,n]}(x)\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$，而对任何 n，$\chi_{[0,n)}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-2x}\leqslant\mathrm{e}^{-x}$. 故由控制收敛定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1.$$

(2) $\int_0^1\dfrac{1+nx}{(1+x)^n}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n}\int_0^\infty\chi_{[0,n]}\dfrac{1+t}{(1+t/n)^n}\mathrm{d}t$. 当 $t>1$ 时，若 $n\geqslant 3$，则 $(1+t/n)^n\geqslant t^3/27$，作控制函数

$$F(t)=\begin{cases}1+t, & 0\leqslant t<1,\\27(1+t)/t^3, & t>1.\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\chi_{[0,n)}\dfrac{1+t}{(1+t/n)^n}=0$，故由控制收敛定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1+nx}{(1+x)^n}\mathrm{d}x=0.$$

(3) 当 $a>0$ 时，

$$\int_a^\infty\frac{n^2x\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{an}^\infty\frac{u\mathrm{e}^{-u^2}}{1+u^2/n^2}\mathrm{d}u=\int_0^\infty\chi_{(an,\infty)}\frac{u\mathrm{e}^{-u^2}}{1+u^2/n^2}\mathrm{d}u,$$

对任何 n，
$$\chi_{(an,\infty)}\frac{u\mathrm{e}^{-u^2}}{1+u^2/n^2}<u\mathrm{e}^{-u^2},$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\chi_{(an,\infty)}\frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2}=0,$$

故知控制收敛定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^\infty \frac{n^2xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}dx=0\ (a>0)$.

当 $a=0$,依控制收敛定理,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{n^2xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2}du=\int_0^\infty ue^{-u^2}du=\frac{1}{2}.$$

例25 证明下列等式:

(1) $(L)\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L)\int_0^1 x^{n-1}dx$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln^p(x+n)}{n}e^{-x}\cos x dx=0,\ p>0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\pi \sin^n x dx=0$.

证 (1) 因为在(0,1)上有 $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$,且 $\frac{1}{1-x},x^{n-1},n=1,2,\cdots$ 都是非负可测. 由勒贝格逐项积分定理,有

$$(L)\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_0^1 x^{n-1}dx.$$

(2) 取 $N\in\mathbf{N}$,使得当 $n>N$ 时,$\ln^p n<n$,则

$$\left|\frac{\ln^p(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\right|\leqslant\frac{n+x}{n}\cdot\frac{\ln^p(x+n)}{x+n}e^{-x}$$

$$<\frac{n+x}{x}e^{-x}<(1+x)e^{-x}.$$

取 $(1+x)e^{-x}$ 为控制函数,由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^p(n+x)}{n}e^{-x}\cos x=0$,依勒贝格控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln^p(x+n)}{n}e^{-x}\cos x dx=\int_0^\infty 0dx=0.$$

(3) 因为在 $[0,\pi]$ 上,$|\sin^n x|\leqslant 1$,除 $x=\pi/2$ 外,$\sin^n x\xrightarrow{n\to\infty}0$. 故依控制收敛定理,得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\lim_{n\to\infty}\sin^n x\mathrm{d}x=0.$$

例26 设E是实直线上的可测集，$m(E)=1$，f是E上的实值可积函数．证明：$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$的充要条件是对任何复数z，

$$\int_E |1+zf(x)|\mathrm{d}x\geqslant 1.$$

证 对复值函数f，若$\mathrm{Re}f$与$\mathrm{Im}\ f$均在E上可积，则f在E上可积，且有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E(\mathrm{Re}f)(x)\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_E(\mathrm{Im}\ f)(x)\mathrm{d}x.$$

必要性 因为，若$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$，则

$$\int_E|1+zf(x)|\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_E(1+zf(x)\mathrm{d}x\right|=\left|1+z\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|=1.$$

充分性 设$z=re^{\mathrm{i}\theta}$，$r>0$，则$\int_E|1+zf(x)|\mathrm{d}x\geqslant 1$等价于$\int_E[|1+re^{\mathrm{i}\theta}f(x)|-1]/r\cdot\mathrm{d}x\geqslant 0$．由计算得知，对任何$r>0$及复数$\zeta$，有

$$\frac{|1+r\zeta|-1}{r}=\frac{2\mathrm{Re}(\zeta)+r|\zeta|^2}{|1+r\zeta|+1},$$

所以
$$\lim_{r\to 0}\frac{|1+re^{\mathrm{i}\theta}f(x)|-1}{2r}=\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}\theta}f(x)).$$

又
$$|(|1+re^{\mathrm{i}\theta}f(x)|-1)/r|\leqslant|f(x)|,$$

则由控制收敛定理，得

$$\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{i}\theta}\int_E f(x)\mathrm{d}x\right)=\int_E\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}\theta}f(x))\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{r\to 0}\int_E(|1+re^{\mathrm{i}\theta}f(x)|-1)/(2r)\cdot\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

适当选取θ，使$e^{\mathrm{i}\theta}\int_E f(x)\mathrm{d}x=-\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|$，故$-\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|\geqslant 0$，

从而知必有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0.$$

例 27 设 $f(x,t)$ 是矩形 $\{(a,b):a\leqslant x\leqslant b,\alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ 上的二元函数，对固定的 $t\in[\alpha,\beta]$，$f(x,t)$ 是勒贝格可积函数. 如果几乎对所有的 x，函数 $f(x,t)$ 对 t 有偏导数，且有 $[a,b]$ 上的勒贝格可积函数 $F(x)$ 存在，使

$$|[f(x,t-h)-f(x,y)]/h|\leqslant F(x),\ \text{a.e.}.$$

证明：任取一列不为零的 $h_n\to 0$，使得 $t+h_n\in[\alpha,\beta]$. 则当 $n\to\infty$ 时，对 $[a,b]$ 中几乎所有的 x，都有

$$\frac{1}{h_n}[f(x,t+h_n)-f(x,t)]\to\frac{\partial}{\partial t}f(x,t).$$

由题设条件与逐项积分定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\frac{1}{h_n}[f(x,t+h_n)-f(x,t)]\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\mathrm{d}x,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\mathrm{d}x.$$

例 28 设 f 是 $(-\infty,\infty)$ 上的勒贝格可测函数，作函数 $\tilde{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}f(x)\mathrm{d}x$. 证明：$\tilde{f}$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的连续函数，且有

$$\tilde{f}(\alpha)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}-1}{\mathrm{i}x}f(x)\mathrm{d}x,$$

这里的 $\tilde{f}$ 即 f 的傅里叶(Fourier)变换.

证 记 $F(x,\alpha)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}-1}{\mathrm{i}x}f(x)$，定义于 $(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$，对固定的 α，F 关于 x 可测，且 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}$ 关于 α 连续，当 $\alpha'\to\alpha$ 时，$F(x,\alpha')\to F(x,\alpha)$. 又有 $|F(x,\alpha)|=|f(x)|$，所以 $|f|$ 可以作为 $F(x,\alpha)$ 的控制函数. 依控制收敛定理知，$\tilde{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x,\alpha)\mathrm{d}x$ 是 α 的连续函数.

又 F 满足例 28 的条件，即有

$$\left|\frac{1}{h}[F(x,\alpha+h)-F(x,\alpha)]\right|$$

$$=\left|\frac{1}{h}\left[\frac{e^{i(\alpha+h)x}-1}{ix}-\frac{e^{i\alpha x}-1}{ix}\right]f(x)\right|=\frac{|e^{ihx}-1|}{|xh|}|f(x)|$$

$$=\left|\frac{2\sin(xh/2)}{xh}\right|\cdot|f(x)|\leqslant|f(x)|.$$

由例28结论知，关于α的微分号可以与积分号交换次序，即

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}-1}{ix}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{e^{i\alpha x}-1}{ix}\right)f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}f(x)dx=\tilde{f}(\alpha).$$

例 29 设f是$(0,\infty)$上周期为T的可测函数，且满足$A=\int_0^T|f(x)|dx<\infty$. 证明：对几乎所有的$x$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}f(nx)=0$.

证 记$u_n(x)=f(nx)/n^2$. 由f的周期性，得

$$\int_0^T|u_n(x)|dx=\frac{1}{n^2}\int_0^T|f(nx)|dx=\frac{1}{n^3}\int_0^{nT}|f(x)|dx=A/n^2.$$

因此，$\sum\limits_n\int_0^T|u_n(x)|dx<\infty$. 依列维定理，对几乎所有的$x$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$收敛. 特别地，对几乎所有的$x$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}f(nx)/n^2=0.$$

例 30 设$\{f_n\}$，$\{g_n\}$是E上的两个可测函数列，且满足：$|f_n|\leqslant g_n$, a. e. $(n=1,2,\cdots)$；$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$, a. e.；$\lim\limits_{n\to\infty}g_n=g$, a. e.；$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dx=\int_E g(x)dx<\infty$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

证 因为$(g-g_n)^+\leqslant g$，$(g-g_n)^+\to0$, a. e.，依控制收敛定理，有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E(g-g_n)^+dx=0$. 利用$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E(g-g_n)dx=0$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E (g-g_n)^- \mathrm{d}x=0$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |g-g_n|\mathrm{d}x=0$.

$\forall\ \varepsilon>0$,取$E_0\subset E\ (m(E_0)<\infty)$,使$\int_{E\setminus E_0}|g|\mathrm{d}x<\varepsilon/2$,从而对充分大的$n$,有$\int_{E\setminus E_0}|g_n|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 于是可取到$E_1(m(E_1)<\infty)$,$E_0\subset E_1\subset E$,使得$\int_{E\setminus E_1}|g_n|\mathrm{d}x<\varepsilon$对一切$n$都成立. 因为$|f_n|\leqslant g_n$,a.e.,所以有

$$\int_{E\setminus E_1}|f_n|\mathrm{d}x<\varepsilon,\quad \int_{E\setminus E_1}|f|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

由于$m(E_1)<\infty$,且由$\{g_n\}$几乎处处收敛可知$\{g_n\}$按测度收敛. 又$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_1}(g_n-g)\mathrm{d}x=0$,故知$\{g_n\}$的积分等度绝对连续,并知$\{f_n\}$的积分等度绝对连续. 又由$\{f_n\}$按测度收敛于$f$,则由例32知,$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_1}(f_n-f)\mathrm{d}x=0$. 综上所述,得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E (f_n-f)\mathrm{d}x=0.$$

注 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,使得当$m(e)<\delta$时,有

$$\left|\int_e f_n\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\ n=1,2,\cdots,$$

称为函数列$\{f_n\}$的积分等度绝对连续.

例31 设$f_1,f_2,\cdots$是测度有限的集E上的非负可积函数,且$\{f_n\}$依测度收敛于f. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

的充要条件是:$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,使得对一切满足$m(e)<\delta$的可测子集$e\subset E$,有$\left|\int_e f_n(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\ n=1,2,\cdots$.

证　必要性　由$(f-f_n)^+\leqslant f$及$\{(f-f_n)^+\}$依测度收敛于0,则依控制收敛定理知,$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E (f-f_n)^+\mathrm{d}x=0$. 由$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E (f-f_n)\mathrm{d}x$

$=0$ 知，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E (f-f_n)^- \mathrm{d}x=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f-f_n|\mathrm{d}x=0$. $\forall\ \varepsilon>0$，取 $\delta>0$，使得当 $m(e)<\delta$ 时，有 $\left|\int_e f\mathrm{d}x\right|<\varepsilon/2$. 再取 $N\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，有 $\int_E |f-f_n|\mathrm{d}x<\varepsilon/2$. 于是，当 $m(e)<\delta$ 时，有

$$\left|\int_e f_n\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_e f\mathrm{d}x\right|+\left|\int_e (f-f_n)\mathrm{d}x\right|$$
$$<\varepsilon/2+\int_E |f-f_n|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

充分性 对 $\varepsilon>0$，取 $\sigma=\varepsilon/(3m(E))$；取 $\delta>0$，使得当 $m(e)<\delta$ 时，有 $\int_e |f_n|\mathrm{d}x<\varepsilon/3$，$\int_e |f|\mathrm{d}x<\varepsilon/3$；再取 $N\in\mathbf{N}$，使 $n\geqslant N$ 时，$m(\{x:|f_n-f|\geqslant\sigma\})<\delta$. 这时有

$$\left|\int_E (f_n-f)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{\{x:|f_n-f|<\sigma\}} |f_n-f|\mathrm{d}x+\int_{\{x:|f_n-f|\geqslant\sigma\}} |f_n-f|\mathrm{d}x$$
$$<\sigma\cdot m(E)+\int_{\{x:|f_n-f|\geqslant\sigma\}} (|f_n|+|f|)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

例 32 设 $\{E_n\}$ 是 $[a,b]$ 的一列可列子集，$m(E_n)\geqslant\delta>0$ $(n=1,2,\cdots)$，$\{a_n\}$ 是一列实数，满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_{E_n}(x)<\infty$，a. e.. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$.

证 由题设知，$[a,b]\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x:\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|\chi_{E_k}(x)\leqslant n\right\}$ 是零集，记 $F_n=\left\{x:\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|\chi_{E_k}(x)\leqslant n\right\}$. 取 $N\in\mathbf{N}$，使得 $m([a,b]\setminus F_N)<\delta/2$. 则由 $m(E_k)\geqslant\delta$ 知，对一切 k，$m(E_k\cap F_N)>\delta/2$. 故依列维定理，有

$$n\cdot m(F_N)\geqslant\int_{F_N}\sum|a_n|\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|m(E_k\cap F_N)\geqslant\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|,$$

所以，$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|<\infty$.

例 33 设$\{f_n\}$依测度收敛于f，$\{f_n\}$非负可测．证明：

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证 设$\underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}x<\infty$．若$\int_E f(x)\mathrm{d}x>\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f(x)\mathrm{d}x$，则存在$\delta>0$和一列单调增加的$\{n_k\}$，使得对任何的$k$，有

$$\int_E f_{n_k}(x)\mathrm{d}x<\int_E f(x)\mathrm{d}x-\delta,$$

但由题设知，$\{f_{n_k}\}$依测度收敛于f，故存在几乎处处收敛于f的子列$\{f_{n'_k}\}$．由法都定理得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_{n'_k}(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x-\delta,$$

推出矛盾．

注 事实上，在$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}x<\infty$时，可以取一列自然数$\{n_k\}$，使得$\int_E f_{n_k}(x)\mathrm{d}x\leqslant k<\infty$，$k=1,2,\cdots$．再取$\{f_{n_k}\}$的一列几乎处处收敛于$f$的子列$\{f_{n'_k}\}$，则依法都定理，有

$$\int_E f\mathrm{d}x=\int_E \underline{\lim}_{k\to\infty} f_{n'_k}\mathrm{d}x \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_{n'_k}\mathrm{d}x \leqslant k<\infty.$$

第三节　可积函数与连续函数

主要内容

1. 若$f\in L(E)$，则对任给的$\varepsilon>0$，存在$\mathbf{R}^n$上具有紧支集的连续函数$g(x)$，使得

$$\int_E |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

2. 若$f\in L(\mathbf{R}^n)$，则有（平均连续性）

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

3. 若 $f\in L(E)$，则存在具有紧支集的阶跃函数列 $\{\varphi_n(x)\}$，使得

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$, a. e. , $x\in E$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E|f(x)-\varphi_n(x)|\mathrm{d}x=0.$

疑 难 解 析

可积函数与连续函数有何关系？

答 由主要内容 1 知，若 $f\in L(E)$，则 $\forall\ \varepsilon>0$，$f(x)$ 可以分解为一个 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $f_1(x)$ 与一个其绝对值在 E 上的积分小于 ε 的函数 $f_2(x)$ 之和，即

$$f(x)=g(x)+[f(x)-g(x)]=f_1(x)+f_2(x),\quad x\in E.$$

因此，在证明命题时可利用这一性质，将一个积分分解为一个连续的积分与一个等于零的积分之和.

方法、技巧与典型例题分析

在证明命题时，利用可积函数与连续函数关系，以及阶跃函数列是十分有效的. 同时，平均连续性的使用，也可使证明变得简明.

例 1 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是有界可测集，证明：

$$\lim_{|h|\to\infty}m(E\cap(E+\{h\}))=m(E),\ h\in\mathbf{R}^n.$$

证 考察特征函数 $\chi_E(x)$. 因为对 $h\in\mathbf{R}^n$，有

$$\chi_{E+\{h\}}(x)=\chi_E(x-h),$$

$$\chi_{E\cap(E\cap\{h\})}(x)=\chi_E(x-h)\cdot\chi_E(x).$$

故得 $$m(E\cap(E+\{h\}))=\int_{\mathbf{R}^n}\chi_E(x)\cdot\chi_E(x-h)\mathrm{d}x.$$

因为 $$m(E)=\int_{\mathbf{R}^n}\chi_E(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}\chi_E^2(x)\mathrm{d}x,$$

所以 $$|m(E\cap(E+\{h\}))-m(E)|$$

$$\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}|\chi_E(x)||\chi_E(x-h)-\chi_E(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}|\chi_E(x-h)-\chi_E(x)|\mathrm{d}x.$$

依可积函数的平均连续性知，上式右边当$|h|\to 0$时趋于零.

例2 设$\{g_n(x)\}$是$[a,b]$上的可测函数列且满足：

(1) $|g_n(x)|\leqslant M,\ x\in[a,b],\ n=1,2,\cdots$;

(2) 对任意的$c\in[a,b]$，有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^c g_n(x)\mathrm{d}x=0$，证明：对任意的$f\in L([a,b])$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

证 $\forall\ \varepsilon>0$，作阶跃函数$\varphi(x)$，使得

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon/2M.$$

可以设$\varphi(x)$在$[a,b]$上的表示式为

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^p y_i\chi_{[x_{i-1},x_i)}(x),\ x\in[a,b).$$

其中$a=x_0<x_1<\cdots<x_p=b$. 因为

$$\left|\int_a^b\varphi(x)g_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{i=1}^p\left|y_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}g_n(x)\mathrm{d}x\right|,$$

又由题设知，存在n_0，当$n\geqslant n_0$时，上式右边小于$\varepsilon/2$，所以$\left|\int_a^b\varphi(x)g_n(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon/2$. 而当$n>n_0$时，有

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(x)g_n(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\left|\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]g_n(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b\varphi(x)g_n(x)\mathrm{d}x\right|\\&<M\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

例3 设$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可积，证明：

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

证 因为$f(x)$勒贝格可积，所以$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_0\in\mathbf{N}$，使得

$$\int_{(-\infty,-N_0+1)}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8},\quad \int_{(N_0-1,\infty)}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8}.$$

于是，当 $|h|<1$ 时，有

$$\int_{(-\infty,-N_0)}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{(-\infty,-N_0)}|f(x+h)|\mathrm{d}x+\int_{(-\infty,-N_0)}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}=\frac{\varepsilon}{4}.$$

类似有
$$\int_{(N_0,\infty)}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.$$

因为 $f(x)$ 在 $[-N_0+1,N_0+1]$ 上可积，则由主要内容1知，存在连续函数 $g(x)$，使得

$$\int_{[-N_0-1,N_0+1]}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{6}.$$

又由 $g(x)$ 在 $[-N_0-1,N_0+1]$ 上的一致连续性，存在 $0<\delta<1$，使得当 $|h|<\delta$ 时，对一切 $x\in[-N_0,N_0]$ 有

$$|g(x+h)-g(x)|<\varepsilon/(12N_0).$$

于是
$$\int_{[-N_0,N_0]}|g(x+h)-g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{[-N_0,N_0]}\frac{\varepsilon}{12N_0}\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon}{6}.$$

从而
$$\int_{[-N_0,N_0]}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{[-N_0,N_0]}|f(x+h)-g(x+h)|\mathrm{d}x$$

$$+\int_{[-N_0,N_0]}|g(x+h)-g(x)|\mathrm{d}x$$

$$+\int_{[-N_0,N_0]}|g(x)-f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

这样一来，当 $|h|<\delta(0<\delta<1)$ 时，就有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{-N_0}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x+\int_{-N_0}^{N_0}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$+\int_{N_0}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

即
$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

例4 设在康托尔闭集P_0上定义函数$f(x)$为零，而在P_0^C中长为$1/3^n$的构成区间上定义$f(x)$为n $(n=1,2,\cdots)$. 证明：f是可积函数，并求积分值.

证 令e_n为P_0^C中长为$1/3^n$的各开区间之并$(n=1,2,\cdots)$，则$P_0^C=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}e_n, m(E_n)=2^{n-1}/3^n$. 令

$$f_n(x)=\begin{cases} i, & x\in e_i,\ i=1,2,\cdots,n,\\ 0, & x\in[0,1]-\bigcup\limits_{i=1}^{n}e_i,\end{cases}$$

则简单函数列$\{f_n(x)\}$满足

$$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots,$$
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ x\in[0,1].$$

由勒贝格控制收敛定理得

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}f_n(x)\mathrm{d}x\\ &=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}i\cdot\frac{2^{i-1}}{3^i}=\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot\frac{2^{i-1}}{3^i}=3,\end{aligned}$$

即f是勒贝格可积函数，积分值为3.

例5 设$f(x)\geqslant 0$为可测函数，令

$$\{f(x)\}_n=\begin{cases} f(x), & f(x)\leqslant n,\\ 0, & f(x)>n.\end{cases}$$

证明：当$f(x)$几乎处处有限时，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\{f(x)\}_n\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证 记$A=\{x:f=\infty\}$，则$m(A)=0$. 于是

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x=0,\quad \int_A\{f(x)\}_n\mathrm{d}x=0.$$

从而
$$\lim_{n\to\infty}\int_A\{f(x)\}_n\mathrm{d}x=\int_A f(x)\mathrm{d}x.$$

在 $E\setminus A$ 上，令

$$u_n(x)=\begin{cases} f(x), & n-1<f(x)<n, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (n=1,2,\cdots).$$

于是 $$\{f(x)\}_n=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\ f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x).$$

则依列维定理的级数形式，得

$$\int_{E\setminus A}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E\setminus A}u_k(x)\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{E\setminus A}u_k(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{E\setminus A}\{f(x)\}_n\mathrm{d}x,$$

从而 $$\lim_{n\to\infty}\int_E\{f(x)\}_n\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_A\{f(x)\}_n\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_{E\setminus A}\{f(x)\}_n\mathrm{d}x$$
$$=\int_A f(x)\mathrm{d}x+\int_{E\setminus A}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

例6 设 f 是 $\mathbf{R}^1$ 上的可积函数，证明：$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n^2x)$ 必在 $\mathbf{R}^1$ 上几乎处处收敛于一可积函数.

证 设 $f\geqslant 0$，则有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(n^2x)\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(n^2x)\frac{1}{n^2}\mathrm{d}(n^2x)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

依列维收敛定理，$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n^2x)$ 几乎处处收敛于一个可积函数.

对一般 f，因为 f^+ 和 f^- 均非负，故分别讨论 f^+ 和 f^- 后，利用 $f=f^+-f^-$ 即可.

例7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 上的阶跃函数 $s(x)$，使得

$$\int_a^b|f(x)-s(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

证 由题设知，依主要内容 1，存在连续函数 $g(x)$，使得 $\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon/2$. 又由 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一致连续性知，存在对 $[a,b]$ 的分割：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，使得 $\varphi(x)$ 在每个小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 上的振幅 $\omega_i<\varepsilon/[2(b-a)]$.

作阶跃函数

$$s(x)=\begin{cases}C_1, & x\in[x_0,x_1],\\ C_{i+1}, & x\in(x_i,x_{i+1}],i=1,\cdots,n-1.\end{cases}$$

其中 C_i 满足 $\min\limits_{x\in(x_i,x_{i+1}]}\varphi(x)\leqslant C_{i+1}\leqslant\max\limits_{x\in(x_i,x_{i+1}]}\varphi(x)$. 于是

$$\begin{aligned}\int_a^b|\varphi(x)-s(x)|\mathrm{d}x&=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|\varphi(x)-C_{i+1}|\mathrm{d}x\\ &\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)-s(x)|\mathrm{d}x&\leqslant\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_a^b|\varphi(x)-s(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

例 8 设 f 是 $[a,b]$ 上可积函数. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$；

(2) $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\cos nx|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证 一般的可积函数可以利用连续函数，进而利用阶跃函数按积分平均的意义逼近.

(1)先设 $f=\chi(\alpha,\beta)$，$(\alpha,\beta)\subset[a,b]$，则当 $n\to\infty$ 时，

$$\int_a^b f(x)\cdot\cos nx\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n}(\sin n\beta-\sin n\alpha)\to 0.$$

由积分的线性性知，对任何阶跃函数 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\chi(\alpha_i,\beta_i)$ 均有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0.$$

设 f 是$[a,b]$上一般可积函数，由例 12，可取连续函数 φ，使 $\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon/3$. 再由一致连续性，取阶跃函数 ψ，使 $\int_a^b|\varphi(x)-\psi(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon/3$. 最后，对阶跃函数 ψ，取 $N\in\mathbf{N}$，使得当 $n\geqslant N$时，$\left|\int_a^b\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$. 这样，有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\left|\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]\cos nx\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b[\varphi(x)-\psi(x)]\cos nx\mathrm{d}x\right|\\
&+\left|\int_a^b\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|\varphi(x)-\psi(x)|\mathrm{d}x\\
&+\left|\int_a^b\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.
\end{aligned}$$

类似可证
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

(2) 采取与(1)同样方法. 因为阶跃函数又是区间上特征函数的线性组合，故实际上只需对 $f=\chi_{(\alpha,\beta)}$（其中$(\alpha,\beta)\subset[a,b]$），证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta|\cos nx|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}(\beta-\alpha).$$

因为$\int_0^\pi|\cos x|\mathrm{d}x=2$，所以

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta|\cos nx|\mathrm{d}x&=\frac{1}{n}\int_{n\alpha}^{n\beta}|\cos x|\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{n}\left\{\int_0^{([n(\beta-\alpha)/\pi]-1)\pi}|\cos x|\mathrm{d}x+\int_{E_n}|\cos x|\mathrm{d}x\right\}\\
&=\frac{1}{n}\cdot 2\cdot\left(\left[\frac{n(\beta-\alpha)}{\pi}\right]-1\right)+\frac{1}{n}\int_{E_n}|\cos x|\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

其中[ ]表示整数部分，$E_n=(n\alpha,([n\alpha/\pi]+1)\pi)\cup([n\beta/\pi]\pi,n\beta)$，

$m(E_n)\leqslant 2\pi$. 显然$\frac{1}{n}\int_{E_n}|\cos x|\mathrm{d}x\to 0(n\to\infty)$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta|\cos nx|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\left[\frac{n(\beta-\alpha)}{\pi}\right]-1\right)=\frac{2}{\pi}(\beta-\alpha).$$

类似可证
$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}(\beta-\alpha).$$

例 9 设 f 是$(0,\infty)$上的可积函数，$[a_\lambda,b_\lambda]$是$(0,\infty)$中与 λ 有关的一族区间，证明：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{a_\lambda}^{b_\lambda}f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t=0.$$

证 用反证法. 若等式不成立，则存在$\varepsilon_0>0$ 及单调趋于∞的$\{\lambda_n\}$，使得$\left|\int_{a_\lambda}^{b_\lambda}f(t)\cos\lambda_n t\mathrm{d}t\right|\geqslant\varepsilon_0$.

因为 f 是可积函数，所以存在 $B>0$，使得$\int_B^\infty|f(t)|\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon_0}{3}$；又存在$\delta>0$，使得当$m(e)<\delta$ 时，$\int_e|f(t)|\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon_0}{3}$.

易见 $a_{\lambda_n}<B$，并记 $c_n=\min\{b_{\lambda_B},B\}$，$a_n=a_{\lambda_n}$，则有$\left|\int_{a_n}^{c_n}f(t)\cos\lambda_n t\mathrm{d}t\right|<\frac{2}{3}\varepsilon_0$. 必要时，还可取一子列. 设$a_n\to a$，$c_n\to c$. 并取$N\in\mathbf{N}$，使当$n>N$ 时，$m((a_n,c_n)\Delta(a,c))<\delta$. 则易知，当$n>N$时，有$\left|\int_a^c f(t)\cos\lambda_n t\mathrm{d}t\right|\geqslant\frac{\varepsilon_0}{3}$. 但是$\lim_{n\to\infty}\int_a^c f(t)\cos\lambda_n t\mathrm{d}t=0$，得出矛盾.

第四节　勒贝格积分与黎曼积分

主要内容

1. 设$f(x)$是定义在$I=[a,b]$上的有界函数，$\{\Delta^{(n)}\}$是对$[a,b]$所作的分割序列.

$$\Delta^{(n)}:a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{k_n}^{(n)}=b,\ n=1,2,\cdots.$$

$$|\Delta^{(n)}|=\max\{x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}:1<i\leqslant k_n\},\ \lim_{n\to\infty}|\Delta^{(n)}|=0.$$

若令(对每个 i 及 n)

$$M_i^{(n)}=\sup\{f(x):x_{i-1}^{(n)}\leqslant x\leqslant x_i^{(n)}\},$$

$$m_i^{(n)}=\inf\{f(x):x_{i-1}^{(n)}\leqslant x\leqslant x_i^{(n)}\}.$$

则关于 $f(x)$ 的达布(Darboux)上、下积分有等式

$$\overline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}M_i^{(n)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}),$$

$$\underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}m_i^{(n)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}).$$

2. 设 $f(x)$ 是定义在 $I=[a,b]$ 上的有界函数,记 $\omega(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的振幅(函数),则有

$$\int_I\omega(x)\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x.$$

等式左边是 $\omega(x)$ 在 I 上的勒贝格积分,等式右边两个积分分别称为 $f(x)$ 在 I 上的上、下积分.

3. 若 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充要条件是:$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点集是零测集.

4. 若 $f(x)$ 在 $I=[a,b]$ 上是黎曼可积的,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是勒贝格可积的,其积分值相同.

5. 设 $\{E_k\}$ 是单调增加的可测集合列,其并集是 E,$f\in L(E_k)$,$k=1,2,\cdots$. 若极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E|f(x)|\mathrm{d}x$ 存在(有限),则 $f\in L(E)$,且有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x.$$

疑 难 解 析

黎曼可积与勒贝格可积有何关系?

答 从本章第一节疑难解析知道,引入勒贝格积分是为了弥补黎曼积分的不足,可以扩大可积函数类,降低逐项积分与交换积

分顺序的条件. 显见,勒贝格积分是与黎曼积分不同的,但两者在计算上有着很重要的联系,但又不是蕴涵关系.

首先,我们知道:对于定义在$[a,b]$上的函数f,如果它是黎曼可积的,则它必是勒贝格可积的,而且有相同的积分值.这样,我们在计算勒贝格积分时,可以考虑其是否黎曼可积,若是,则可以化为黎曼积分来算出,而黎曼积分是我们在数学分析中已经熟悉的.对于无界函数的积分或函数在无穷区间上的积分,黎曼积分是作为广义积分来定义的. 这时要求$\{E_k\}$是单调增加的可测集合列,其并为E,若极限$\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x$存在(有限),则$f$在$E$上勒贝格可积,且有$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x$. 特别地,当$E_k$是矩体$I_k$(如$\mathbf{R}^1$中$E_k=[0,k]$, $k=1,2,\cdots$, $E=(0,\infty)$)且$f(x)$在每个I_k上都是有界连续函数,同时满足$\lim\limits_{k\to\infty}\int_{I_k}|f(x)|\mathrm{d}x<\infty$时,可以通过计算黎曼积分$\int_{I_k}f(x)\mathrm{d}x$而得到勒贝格积分

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{I_k}f(x)\mathrm{d}x.$$

而且计算方法与$\{I_k\}$的选择无关,只需保证$\{I_k\}$单调增加到并集E.

但是,我们必须指出,具有广义黎曼积分的函数并不一定勒贝格可积.

方法、技巧与典型例题分析

辨析黎曼积分与勒贝格积分的异同,要求我们对勒贝格积分与黎曼积分的概念十分熟悉.在计算勒贝格积分时,要能正确区分相应的黎曼积分是正常积分还是广义积分,以选择适当的方法去计算.

例 1 设$f(x)$是E上的有界可测函数,问:是否$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>$

0，使得当分割D满足条件$\max\{m(E_1),m(E_2),\cdots,m(E_n)\}<\delta$时，就有上积分$\overline{\int}_E f(x)\mathrm{d}x$与大和$\overline{S}(D)$之差的绝对值满足

$$\left|\overline{\int}_E f(x)\mathrm{d}x-\overline{S}(D)\right|<\varepsilon.$$

（即黎曼积分中的达布定理对勒贝格积分是否还成立）

解 对勒贝格积分来说，黎曼积分中的达布定理不再成立.

例如，在$[0,1]$上的狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为}[0,1]\text{中的无理数},\\ 1, & x\text{ 为}[0,1]\text{中的有理数}\end{cases}$$

是勒贝格可积的，且$\int_0^1 D(x)\mathrm{d}x=0$. 因为对分割$D$，当分点组有$y_{k-1}\leqslant 0\leqslant y_k$时，$m(E_k)=1$. 但此时$\xi_k\in[y_{k-1},y_k]$，故$|\xi_k|\leqslant\delta(D)$. 而对其他的$E_k$，均有$m(E_k)=0$，所以$\overline{S}(D)=\xi_k$，$|\xi_k|\leqslant\delta(D)$，从而$\lim\limits_{\delta(D)\to 0}S(D)=0$，$D(x)$勒贝格可积，且$\int_0^1 D(x)=0$（关于分割可参看第二节疑难解析1）.

但对$\varepsilon_0=1/2$，于任意的$\delta>0$，存在$n\in\mathbf{N}$，使$1/n<\delta$. 取将$[0,1]$ n等分的分割

$$D:E=[0,1]=\sum_{k=1}^{n}E_k,\ m(E_k)=1/n<\delta,\ k=1,2,\cdots,n.$$

显然$\max\{m(E_1),m(E_2),\cdots,m(E_n)\}<\delta$. 又因有理数在实数中的稠密性知，$f(x)$在各$E_k$的上确界为1，故

$$\overline{S}(D)=\sum_{k=1}^{n}1\cdot m(E_k)=m(E)=1.$$

从而 $$\left|\overline{\int}_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}x-\overline{S}(D)\right|=|0-1|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon.$$

例2 设f是$[a,b]$上的函数，$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. f在$[x_0,x_1]$，$(x_{i-1},x_i]$上取常数$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$. 证明：f在$[a,b]$上勒贝格可积，且

$$(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i-x_{i-1})=(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证 由勒贝格积分定义，f 在$[x_0,x_1]$及$(x_{i-1},x_i]$上勒贝格可积，且

$$(L)\int_{(x_{i-1},x_i]} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i-x_{i-1})=(R)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x,$$

类似等式在$[x_0,x_1]$上也成立．于是，依积分的有限可加性得

$$(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i-x_{i-1})=(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 3 计算$[0,1]$上函数

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\text{ 为无理数}, \\ 0, & x\text{ 为有理数} \end{cases}$$

的积分值．

解 $f(x)$与$g(x)=e^x$ 均为$[0,1]$上有界可测函数，且$f(x)=g(x)$, a.e.，于是

$$\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,1]} g(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,1]} e^x\mathrm{d}x,$$

而e^x 在$[0,1]$上黎曼可积，故

$$\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,1]} e^x\mathrm{d}x=(R)\int_0^1 e^x\mathrm{d}x=e-1.$$

对于一般非负函数的积分，通常取截断函数来求．即

设$m(E)<\infty$，$f(x)$是E 上的非负函数，对任意自然数n，令

$$[f(x)]_n=\begin{cases} f(x), & \text{当 } f(x)\leqslant n \text{ 时}, \\ n, & \text{当 } f(x)>n \text{ 时}, \end{cases}$$

称$[f(x)]_n$ 为$f(x)$的截断函数．并且

(1) 对任意n，$[f(x)]_n$ 均为E 上的非负有界函数；

(2) 截断函数是单调不减函数，即

$$[f(x)]_1\leqslant[f(x)]_2\leqslant\cdots\leqslant[f(x)]_n\leqslant\cdots.$$

特别地，有 $$\lim_{n\to\infty}[f(x)]_n=f(x),\ x\in E.$$

例 4 计算下列函数的积分：

(1) $f(x)=1/\sqrt[3]{x-1}$在$[1,2]$上的积分；

(2) $f(x)=\begin{cases}1/\sqrt{x}, & x\text{ 为}[0,1]\text{上无理数},\\ x^2, & x\text{ 为}[0,1]\text{上有理数}.\end{cases}$

解 用截断函数求解.

(1) $f(x)$是$[1,2]$上的非负函数，作截断函数

$$[f(x)]_n=\begin{cases}n, & 1\leqslant x<1+1/n^3,\\ 1/\sqrt[3]{x-1}, & 1+1/n^3\leqslant x<2.\end{cases}$$

显然，对每个$[f(x)]_n$均黎曼可积，故勒贝格可积，

$$\int_{[1,2]}[f(x)]_n\mathrm{d}x=(R)\int_1^{1+1/n^3}n\mathrm{d}x+(R)\int_{1+1/n^3}^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$=\left[n\left(1+\frac{1}{n^3}\right)-n\right]+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2n^2}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}.$$

于是

$$\int_{[1,2]}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{[1,2]}[f(x)]_n\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{3}{2}.$$

(2) 因为$f(x)$在$(0,1)$上几乎处处等于$1/\sqrt{x}$，故

$$\int_{(0,1)}f(x)\mathrm{d}x=\int_{(0,1)}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

由于$1/\sqrt{x}$在$(0,1)$上无界，作截断函数

$$[1/\sqrt{x}]_n=\begin{cases}1/\sqrt{x}, & 1/n^2\leqslant x<1,\\ n, & 0<x<1/n^2.\end{cases}$$

故
$$\int_{(0,1)}(1/\sqrt{x})\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{(0,1)}[1/\sqrt{x}]_n\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\int_{(0,1/n^2)}n\mathrm{d}x+\int_{(1/n^2,1)}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[n\cdot 1/n^2+(2-2/n)]=2,$$

所以
$$\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}x=2.$$

例 5 设$E=(0,\infty)$，E上函数

$$f(x)=\begin{cases}x^{-1/2}, & x\in(0,1],\\ x^{-2}, & x\in(1,\infty),\end{cases}$$

求$\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

解 作截断函数

$$[f(x)]_n=\begin{cases}n, & 0<x\leqslant 1/n^2,\\ x^{-1/2}, & 1/n^2<x\leqslant 1,\\ x^{-2}, & 1<x<\infty.\end{cases}$$

取$E_n=[1/n^2,n]$，$n=1,2,\cdots$. 由于$[f(x)]_n$在E_n上黎曼可积，所以

$$\int_{E_n}[f(x)]_n\mathrm{d}x=(R)\int_{1/n^2}^{1}x^{-1/2}\mathrm{d}x+(R)\int_1^n x^{-2}\mathrm{d}x$$

$$=2x^{1/2}\Big|_{1/n^2}^{1}-\frac{1}{x}\Big|_1^n=3-\frac{3}{n}.$$

故 $$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}[f(x)]_n\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{3}{n}\right)=3.$$

例6 证明$\int_{(0,1)}\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2}$ $(p>-1)$.

证 在$(0,1)$上，$\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\sum_{n=0}^{\infty}x^{p+n}\ln x$.

故 $$\int_{(0,1)}\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(0,1)}x^{p+n}\ln x\mathrm{d}x$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(R)\int_0^1 x^{p+n}\ln x\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(p+n+1)^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2}.$$

例7 求$\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\mathrm{d}x$.

解 因为$f(x)$在$[0,1]$上连续，所以在$[0,1]$上黎曼可积. 又因为

$$\left|\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\right|\leqslant\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}=\frac{nx}{1+n^2x^2}x^{-1/2}\leqslant\frac{1}{2}x^{-1/2},$$

且 $$\lim_{n\to\infty}\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx=0,\quad x\in[0,1].$$

则依勒贝格控制收敛定理，得

$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(L)\int_{[0,1]}\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\mathrm{d}x$$
$$=\int_{[0,1]}0\mathrm{d}x=0.$$

例 8 设函数 f 定义在 $[0,1]$ 上，对康托尔集中的点 x，$f(x)=x^2$；当 x 属于长为 $1/3^n$ 的康托尔集的余区间时，$f(x)=1/2^n$. 计算 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解 因为康托尔集是零集，所以在康托尔集上可积函数的积分值为零. 设康托尔集的余区间全体是 $\{I_k^{(n)}\}$，$k=1,2,\cdots,2^{n-1}$，$n=1,2,\cdots$，则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n,k}\int_{I_k^{(n)}}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{2^{n-1}}{3^n}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{4}.\ \left(m(I_k)=\frac{2^{n-1}}{3^n}\right).$$

也可以仿照上节例 4 的方法求解.

例 9 函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{在无理点}\\ 1, & \text{在有理点}\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上是否黎曼可积？是否勒贝格可积？计算 $[0,1]$ 上的积分值.

解 在 $[0,1]$ 上，除了点 $x=1$ 外，$f(x)$ 都间断，因而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不黎曼可积. 但 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界可测，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上勒贝格可积. 因为 $f(x)=\varphi(x)$, a. e. ,$\varphi(x)=x^3$，所以

$$(L)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x=(L)\int_0^1 x^3\mathrm{d}x.$$

而 $\varphi(x)=x^3$ 在 $[0,1]$ 上黎曼可积. 从而

$$L\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=(R)\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

例10 在线段[0,1]上作测度为1/2的无处稠密的完备集. 此集的邻接区间按它们之长度减小的顺序进行编号为(α_1,β_1)，$(\alpha_2,\beta_2),\cdots,(\alpha_n,\beta_n),\cdots$，然后在[0,1]上给出函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{在} E \text{上};\\ 1, & \text{在区间}(\alpha_n,\beta_n)\text{的中点};\\ \text{在闭区间}\left[\alpha_n,\dfrac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right]\text{及}\left[\dfrac{\alpha_n+\beta_n}{2},\beta_n\right]\text{上为线性的}.\end{cases}$$

此函数黎曼可积还是勒贝格可积？求[0,1]上$f(x)$的勒贝格积分值.

解 类似上例，因为$f(x)$在一正测度集上间断，所以它不是黎曼可积的，但它是勒贝格可积的. 且有

$$(L)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_{\alpha_n}^{\beta_n}f(x)\mathrm{d}x.$$

因为$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x=0\cdot m(E)=0$. 在$(\alpha_n,\beta_n)$上$f(x)$黎曼可积，故

$$(L)\int_{\alpha_n}^{\beta_n}f(x)\mathrm{d}x=(R)\int_{\alpha_n}^{\beta_n}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\beta_n-\alpha_n}{2}\cdot 1,$$

$$(L)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n-\alpha_n}{2}.$$

由题设知$\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n)$是邻接区间长度，等于$E^{\mathrm{C}}$的测度(1/2)，所以

$$(L)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

例11 若在康托尔集D的点上$f(x)=10$，而在邻接区间上函数的图形是以这些邻接区间为直径所作圆周的上半圆. 求函数$f(x)$在[0,1]上的勒贝格积分值.

解 用(α_n,β_n)表示康托尔集的邻接区间，且(α_n,β_n)是按其长度减少的次序来排列的，于是

$$(L)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_D f(x)\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_{\alpha_n}^{\beta_n}f(x)\mathrm{d}x.$$

因为$m(D)=0$，所以$(L)\int_D f(x)\mathrm{d}x$. 而$(\alpha_n,\beta_n)$上的积分可用黎曼积分来计算，因而它们中的每一个等于相应半圆的面积，故有

$$(L)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(\beta_n-\alpha_n)^2}{8}.$$

但是，对康托尔集情形有：

$$\beta_1-\alpha_1=1/3,\beta_2-\alpha_2=\beta_3-\alpha_3=1/3^2,$$

$$\beta_4-\alpha_4=\cdots=\beta_7-\alpha_7=1/3^3,\cdots,$$

所以 $$(L)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2^2}{3^6}+\cdots\right]=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{\pi}{56}.$$

例 12 计算定义在$(0,1)$上的黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}1/q, & \text{当 } x=p/q(p,q \text{ 为互质的整数})\text{时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

的积分值.

解 因为$R(x)$是有界函数且在$(0,1)$上几乎处处连续，所以$R(x)$是黎曼可积的. 但用黎曼积分计算将较复杂，故用勒贝格积分来求.

令 $A=\{x:x$ 为$(0,1)$中有理数$\}$，$B=\{x:x$ 为$(0,1)$中无理数$\}$，则有

$$\begin{aligned}(R)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=(L)\int_{(0,1)} R(x)\mathrm{d}x\\&=(L)\int_A \frac{1}{q}\mathrm{d}x+(L)\int_B 0\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{q}m(A)=0.\end{aligned}$$

例 13 证明：$[a,b]$上广义黎曼可积函数$f(x)$勒贝格可积的充要条件是$|f(x)|$广义黎曼可积. 且此时两个积分的值相等.

证 为简单计，设$f(x)$在$[a,b]$上广义黎曼可积，且仅在点b无界.

必要性 设$f(x)$勒贝格可积，则当$a\leqslant\eta<b$时，$f(x)$在$[a,\eta]$上有界黎曼可积，$|f(x)|$也在$[a,\eta]$上有界黎曼可积，从而$|f(x)|$在$[a,\eta]$上勒贝格可积，有

$$(R)\int_a^\eta |f(x)|\mathrm{d}x=(L)\int_a^\eta |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant(L)\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x<\infty.$$

由η的任意性知，$|f(x)|$在$[a,b]$上广义黎曼可积.

充分性 设$|f(x)|$也广义黎曼可积，则因为$f(x)$广义黎曼可积，故在任一区间$[a,\eta]$ $(a\leqslant\eta<b)$上有界黎曼可积，且由所设有

$$A=\lim_{\eta\to b}(R)\int_a^\eta |f(x)|\mathrm{d}x<\infty.$$

选点列$\{\eta_n\}$，使$a\leqslant\eta_n<b$，且$\eta_1<\eta_2<\cdots$，$\eta_n\xrightarrow{n\to\infty}b$. 作函数

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & a\leqslant x\leqslant\eta_n,\\ 0, & \eta_n<x\leqslant b.\end{cases}$$

因为$f_n(x)$显然在$(\eta_n,b]$上勒贝格可积，且$\int_{\eta_n}^b f_n(x)\mathrm{d}x=0$. 由积分的区间可加性知，$f_n(x)$在$[a,b]$上勒贝格可积，从而$|f_n(x)|$在$[a,b]$上勒贝格可积，且有

$$(L)\int_a^b |f_n(x)|\mathrm{d}x=R\int_a^{\beta_n} |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant A.$$

因为$|f_n(x)|$是$[a,b]$上的单调增加函数列，故由列维定理，$|f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x)|$在$[a,b]$上勒贝格可积. 由于对任何$n$，$|f_n(x)|\leqslant|f(x)|$，故取$f(x)$为$f_n(x)$的控制函数，则依控制收敛定理，有

$$\begin{aligned}(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &=\lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b |f_n(x)|\mathrm{d}x\\ &=\lim_{n\to\infty}(R)\int_a^{\beta_n} f(x)\mathrm{d}x=(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

类似可证有无穷限的广义黎曼可积函数情形. 只需将所取的$\{\eta_n\}$，使$\eta_n\to\infty$即可.

例 14 证明：勒贝格有界收敛定理当$m(E)=\infty$时不再成立.

证 取$E=(0,\infty)$，在E上定义

$$f_n(x)=\begin{cases}\sin x/x, & 0<x\leqslant 2n\pi,\\ 0, & 2n\pi<x<\infty,\end{cases}\qquad f(x)=\sin x/x.$$

则$\{f_n(x)\}$是E上的可测函数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，$|f_n(x)|<1$，$n=1,2,\cdots,x\in(0,\infty)$.

由$f_n(x)$的定义可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{(0,2n\pi)}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^{2n\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$
$$=(R)\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

又因为$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}$，但$(R)\int_0^{\infty}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x$发散，而$(R)\int_0^{\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$收敛，所以$\left|\frac{\sin x}{x}\right|$在$(0,\infty)$上非黎曼可积，则依上例结论知，$f(x)=\frac{\sin x}{x}$在$(0,\infty)$上不是勒贝格可积函数，必有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x\neq\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

即有界收敛定理在$m(E)=\infty$时不成立.

第五节　重积分与累次积分

主要内容

一、富比尼(Fubini)定理

1. 令$n=p+q$，其中p,q是正整数.

$$\mathbf{R}^p,x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_p),$$
$$\mathbf{R}^q,y=(\xi_{p+1},\xi_{p+2},\cdots,\xi_n),$$
$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q,\ (x,y)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_p,\xi_{p+1},\cdots,\xi_n).$$

定义在$\mathbf{R}^n$上的函数f的积分记做

$$\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(1) 若A,B分别是$\mathbf{R}^p$和$\mathbf{R}^q$中的可测集，则$A\times B$必为$\mathbf{R}^n$中的可测集，且$m(A\times B)=m(A)\times m(B)$.

(2) 若 E 是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的可测集，则几乎对所有的 $x\in\mathbf{R}^p$，$E_x=\{y:(x,y)\in E\}$ 都是 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集.

$A\times B$ 称为笛卡尔积集，具有以下简单性质：

(1) 若 $A_1\subset A_2$，则 $A_1\times B\subset A_2\times B$；

(2) 若 $A_1\cap A_2=\varnothing$，则 $(A_1\times B)\cap(A_2\times B)=\varnothing$；

(3) $(\bigcup_{\lambda\in A}A_\lambda)\times B=\bigcup_{\lambda\in A}(A_\lambda\times B)$，$(\bigcap_{\lambda\in A}A_\lambda)\times B=\bigcap_{\lambda\in A}(A_\lambda\times B)$；

(4) $(A_1\setminus A_2)\times B=(A_1\times B)\setminus(A_2\times B)$.

对 $E\subset\mathbf{R}^{p+q}$，$x_0\in\mathbf{R}^p$，定义 $\mathbf{R}^q$ 中的点集 $E_{x_0}=\{y:(x_0,y)\in E\}$，称为 E 关于 x_0 的截口，具有以下性质：

(1) $m(E_x)$ 是 x 的函数，在 $\mathbf{R}^p$ 中几乎处处有定义，是可测函数；

(2) $m(E)=\int_{\mathbf{R}^p}m(E_x)\mathrm{d}x$.

2. 非负可测函数情形的托涅利(Tonelli)定理

设 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 上的非负可测函数，则

(1) 对于几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$，$f(x,y)$ 作为 y 的函数是 $\mathbf{R}^q$ 上的非负可测函数；

(2) 若 $F_f(x)=\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$，则 $F_f(x)$ 是 $\mathbf{R}^p$ 上的非负可测函数；

(3) $\int_{\mathbf{R}^p}F_f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3. 富比尼定理　设 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^{p+q}=\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 上的可积函数，则

(1) 几乎对所有的 $x\in\mathbf{R}^p$，$f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^q$ 上关于 y 的可积函数；

(2) 几乎处处有定义的函数 $g(x)=\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $\mathbf{R}^p$ 上可积；

(3)
$$\int_{\mathbf{R}^{p+q}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^q}\mathrm{d}y\int_{\mathbf{R}^p}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

4. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，若积分 $\int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\cdot g(y)\mathrm{d}y$ 存在，则称此积分为 f 与 g 的卷积，记做 $(f*g)(x)$.

5. 若 $f,g\in L(\mathbf{R}^n)$，则 $(f*g)(x)$ 对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^n$ 存在，$(f*g)(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的可积函数，且有

$$\int_{\mathbf{R}^n}|(f*g)(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_{\mathbf{R}^n}|g(y)|\mathrm{d}y\right).$$

6. 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，对任意的 $\lambda>0$，作点集 $\{x:|f(x)|>\lambda\}$，则它为可测集. 称

$$f_*(\lambda)=m(\{x:|f(x)|>A\})$$

为 f 的分布函数（是 $(0,\infty)$ 上的单调减少函数）. 有

$$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda\quad(1\leqslant p<\infty).$$

二、积分的几何意义

1. 设 E 是 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 中的可测集，对任意的 $x\in\mathbf{R}^p$，令

$$E(x)=\{y\in\mathbf{R}^q;(x,y)\in E\},$$

为集 E 在 x 处的截段集，则对几乎处处的 x，$E(x)$ 是 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集，$m(E(x))$ 是 $\mathbf{R}^p$ 上（几乎处处有定义的可测函数，且 $m(E)=\int_{\mathbf{R}^p}m(E(x))\mathrm{d}x$.

2. 若 E_1 与 E_2 分别是 $\mathbf{R}^p$ 与 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集，则 $E_1\times E_2$ 是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 中的可测集，且有

$$m(E_1\times E_2)=m(E_1)\cdot m(E_2).$$

3. 可测函数图形的测度　设 $f(x)$ 是 E 上的非负实值可测函数，作点集 $G_E(f)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^{n+1}:x\in E,y=f(x)\}$，称为 f 在 E 上的图形（E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，$G_E(f)$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的点集），则 $m(G_E(f))=0$.

4. 积分的几何意义　设 $f(x)$ 是 E 上的非负实值可测函数，记 $\underline{G}(f)=\underline{G}_E(f)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^{n+1}:x\in E,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$，称为 f 在 E 上的下方图形集. 有

(1)若$f(x)$是可测函数，则$\underline{G}(f)$是$\mathbf{R}^{n+1}$中的可测集，且有

$$m(\underline{G}(f))=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

(2)若E是可测集，$\underline{G}(f)$是$\mathbf{R}^{n+1}$中的可测集，则$f(x)$是可测函数，且有$m(\underline{G}(f))=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$

疑难解析

1. 富比尼定理说明什么？使用富比尼定理时要注意什么？

答 富比尼定理说明了高维积分与低维积分之间的关系，也就是数学分析中重积分与累次积分之间的关系. 我们可以看到，在交换积分次序问题上，勒贝格积分要求的条件比黎曼积分要求的条件弱得多，这就是勒贝格积分理论的优越性之一.

事实上，若把$\int_{A\times B}f(p)\mathrm{d}p$称为重积分，而将$\int_A \mathrm{d}x\int_B f(x,y)\mathrm{d}y$和$\int_B \mathrm{d}y\int f(x,y)\mathrm{d}x$称为累次积分，则富比尼定理说明，在重积分存在的条件下，两个累次积分均存在且等于重积分. 要证明重积分存在有时不很容易，这时可由$|f|$的两个累次积分的一个存在来确定. 但是f的两个累次积分的一个存在并不能保证重积分存在. 例如：

设$E=(0,1)\times(0,1)$，E上函数$f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，则$f$的两个(勒贝格)累次积分为

$$\int_{(0,1)}\left(\int_{(0,1)}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_{(0,1)}\left(\int_{(0,1)}f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{-1}{1+y^2}\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4}.$$

显然它们并不相等，从而知f在E上不可积.

2. 非负可测函数积分的几何意义是什么？

答 若定义在$[a,b]$上的非负函数$f(x)$黎曼可积，则

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的几何意义是由直线 $x=a, x=b, y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 所围曲边梯形的面积，这是数学分析中非负函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上定积分的几何解释．非负可测函数的勒贝格积分也有类似的几何解释．

对定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的非负函数，称 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的点集 $\{(x,y):x\in E, 0\leqslant y<f(x)\}$ 为 f 在 E 上的下方图形，记做 $G_E(f)$．当 f 在 E 上可测时，有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=m(G_E(f)).$$

即非负可测函数 f 在 E 上的积分等于与它相应的下方图形的测度．对于一般的在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可积函数 f，有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=m(G_E(f^+))-m(G_E(f^-)).$$

即 f 在 E 上的积分相当于 f 的正部 f^+ 与负部 f^- 下方图形的测度之差．这与一般函数 f 的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何解释也是一致的．

方法、技巧与典型例题分析

用富比尼定理证明命题时，首先要验证命题是否合乎定理条件，而关键的是将积分化为累次积分，这时常常需要引入特征函数，读者要注意变化后被积函数的准确性．另一点要注意的是交换积分顺序技巧的应用．

例 1 在$[0,1]\times[0,1]$上函数 f 可积．证明：

$$\int_0^1\left[\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

证 记 $E=\{(x,y):0\leqslant y\leqslant x, 0\leqslant x\leqslant 1\}$，是可测集，$\chi_E f$ 是可测的，且 $|\chi_E f|\leqslant|f|$，所以 $\chi_E f$ 勒贝格可积，依富比尼定理有

$$\int_0^1\left[\int_0^1\chi_E f\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\int_0^1\chi_E f\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

即 $$\int_0^1\left[\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

例 2 设在$[0,1]\times[0,1]$上有函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x,y\text{ 为无理数},\\ 0, & x,y\text{ 为有理数},\end{cases}$$

求积分$\int_{[0,1]\times[0,1]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 由于$f(x_0,y)$对于固定的x_0，只对可列多个y取值为零，因此

$$\int_{[0,1]\times[0,1]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 1\mathrm{d}x=1.$$

例 3 证明：$f(x,y)=\frac{1}{x^\alpha(1-y)^\beta}$，$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$，在$E=[0,1]\times[0,1]$上可积，求其积分值.

证 因为$f(x,y)$在E上非负连续，故在E上非负可测. 依富比尼定理，有

$$\int_E\frac{1}{x^\alpha(1-y)^\beta}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1-y)^\beta}\mathrm{d}y,$$

由于$\left|\frac{1}{x^\alpha}\right|$与$\left|\frac{1}{(1-y)^\beta}\right|$均在$[0,1]$上广义黎曼可积(依上节例 13)，故

$$(L)\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x=(R)\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\alpha},$$

$$(L)\int_0^1\frac{1}{(1-y)^\beta}\mathrm{d}y=(R)\int_0^1\frac{1}{(1-y)^\beta}\mathrm{d}y=\frac{1}{1-\beta}.$$

于是 $$\int_E\frac{1}{x^\alpha(1-y)^\beta}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\beta}<\infty.$$

即$f(x,y)$在E上勒贝格可积，积分值为$\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)}$.

例 4 设$f(x)$在$\mathbf{R}^p$上可积，$g(x)$在$\mathbf{R}^q$上可积. 证明：$f(x)\cdot g(y)$在$\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$上可积，且

$$\int_{\mathbf{R}^{p+q}}f(x)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\int_{\mathbf{R}^p}f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbf{R}^q}g(y)\mathrm{d}y\right).$$

证 因为$f(x)$与$g(y)$可积，所以它们分别在$\mathbf{R}^p$与$\mathbf{R}^q$上可测，从而$|f(x)|$与$|g(y)|$分别在$\mathbf{R}^p$和$\mathbf{R}^q$上可测，则（依第三章第一节例13所证）$|f(x)|\cdot|g(y)|$在$\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$上负可测．依富比尼定理

$$\int_{\mathbf{R}^{p+q}}|f(x)|\cdot|g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^q}|f(x)|\cdot|g(y)|\mathrm{d}y.$$

对任一固定的x，有

$$\int_{\mathbf{R}^q}|f(x)|\cdot|g(y)|\mathrm{d}y=|f(x)|\int_{\mathbf{R}^q}|g(y)|\mathrm{d}y,$$

由题设知$g(y)$在$\mathbf{R}^q$上可积，故$\int_{\mathbf{R}^q}|g(y)|\mathrm{d}y$是一确定值，故

$$\int_{\mathbf{R}^{p+q}}|f(x)|\cdot|g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^p}|f(x)|\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^q}|g(y)|\mathrm{d}y.\qquad ①$$

由题设知$f(x)$在$\mathbf{R}^p$上可积，故$\int_{\mathbf{R}^p}|f(x)|\mathrm{d}x$是一确定值，于是式①右边为确定值（有限数）．从而知$|f(x)|\cdot|g(y)|$在$\mathbf{R}^{p+q}$上可积，即$|f(x)g(y)|$在$\mathbf{R}^{p+q}$上可积，得$f(x)\cdot g(y)$在$\mathbf{R}^{p+q}$上可积，依富比尼定理

$$\int_{\mathbf{R}^{p+q}}f(x)\cdot g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\int_{\mathbf{R}^p}f(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_{\mathbf{R}^q}g(y)\mathrm{d}y\right).$$

例 5 设f是$\mathbf{R}^2$上的可测函数．若对几乎处处的$x\in\mathbf{R}^1$，$f(x,y)$关于y几乎处处取有限值．证明：对几乎处处的$y\in\mathbf{R}^1$，$f(x,y)$关于x几乎处处取有限值．

证 记$E=\{(x,y):f(x,y)$取有限值$\}$，由题设知

$$\int\left[\int\chi_{\mathbf{R}^2\setminus E}(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int 0\mathrm{d}x=0.$$

故依富比尼定理，有$\int\left[\int\chi_{\mathbf{R}^2\setminus E}(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=0$. 即对几乎处处的$y$，$\int\chi_{\mathbf{R}^2\setminus E}(x,y)\mathrm{d}x=0$，即对几乎处处的$y$，$\mathbf{R}^2\setminus E$的截口是零集，也就是$f(x,y)$关于$x$几乎处处取有限值．

例6 设f定义于$\mathbf{R}^2$，如果对任何$x\in\mathbf{R}^1$，$f(x,y)$是y的可测函

数，又对任何$y\in\mathbf{R}^1$，$f(x,y)$是x的连续函数．证明：f是$\mathbf{R}^2$上的可测函数．

证 若对任何整数m和自然数n，作

$$f_n(x,y)=(m-nx)f\left(\frac{m-1}{n},y\right)+(nx-m+1)f\left(\frac{m}{n},y\right),$$

其中$x\in\left[\frac{m-1}{n},\frac{m}{n}\right)$．易见对$x\in\left[\frac{m-1}{n},\frac{m}{n}\right)$，$f_n(x,y)$介于$f\left(\frac{m-1}{n},y\right)$与$f\left(\frac{m}{n},y\right)$之间．

对任何$(x,y)\in\mathbf{R}^2$，因为当y固定时，f是x的连续函数，所以$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x,y)=f(x,y)$，又对固定的$x$，$f$是$y$的可测函数，从而$f_n(x,y)$是$\mathbf{R}^2$上的可测函数，故其极限函数$f$也可测．

例7 在$E=(0,1)\times(0,1)$上定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1/q_x+1/q_y, & (x,y)\text{为}E\text{中有理点},\\ 0, & (x,y)\text{为}E\text{中其余点}.\end{cases}$$

其中q_x,q_y分别为x,y的既约分数的分母，求积分$\int_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

解 因为$f(x,y)$在E上有界可测，所以$f(x,y)$勒贝格可积，则依富比尼定理，有

$$\int_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{(0,1)}\mathrm{d}x\int_{(0,1)}f(x,y)\mathrm{d}y. \qquad ①$$

因为对任意固定的x，$f(x,y)$关于y在$(0,1)$上几乎处处连续，因此，对任意固定的x，$f(x,y)$关于y可积，且$\int_{(0,1)}f(x,y)\mathrm{d}y=0$，于是

$$\int_{(0,1)}\mathrm{d}x\int_{(0,1)}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,1)}0\mathrm{d}x=0.$$

由①式即知
$$\int_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

例8 设f是定义于直线上的非负可测函数，$p>0$．证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)^p\mathrm{d}x=p\int_0^{\infty}t^{p-1}m\{x:f(x)>t\}\mathrm{d}t.$$

证 设$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^p \mathrm{d}x<\infty$，依富比尼定理

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^p \mathrm{d}x &= p\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_0^{f(x)} t^{p-1}\mathrm{d}t\\ &= p\int_{(-\infty,\infty)\times(0,\infty)} t^{p-1}\chi_{(0,f(x))}(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\ &= p\int_{(-\infty,\infty)\times(0,\infty)} t^{p-1}\chi_{(t,\infty)}(f(x))\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\ &= p\int_0^{\infty} t^{p-1}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(t,\infty)}(f(x))\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\\ &= p\int_0^{\infty} t^{p-1} m(\{x:f(x)>t\})\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

此题有两处关键步骤：

(1) 化$f(x)^p=\int_0^{f(x)} pt^{p-1}\mathrm{d}t$，从而使之出现累次积分；

(2) 使$\chi_{(0,f(x))}(t)=\chi_{(t,\infty)}(f(x))$，从而使$\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(t,\infty)}(f(x))\mathrm{d}x=m(\{x:f(x)>t\})$.

这里χ_A表示集合A的特征函数.

例9 设$h>0$，勒贝格可测集$A\subset[a,b]$，则

$$\frac{1}{2h}\int_a^b m(A\cap(x-h,x+h))\mathrm{d}x\leqslant m(A).$$

证 因为$x-h<t<x+h$等价于$t-h<x<t+h$，故依富比尼定理，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2h}\int_a^b m(A\cap(x-h,x+h))\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2h}\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b\chi_{A\cap(x-h,x+h)}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2h}\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b\chi_A(t)\chi_{(x-h,x+h)}(t)\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{2h}\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b\chi_A(t)\chi_{(t-h,t+h)}(x)\mathrm{d}t=\frac{1}{2h}\int_a^b\chi_A(t)\mathrm{d}t\int_a^b\chi_{(t-h,t+h)}(x)\mathrm{d}x\\ &\leqslant\frac{1}{2h}\int_a^b\chi_A(t)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(t-h,t+h)}(x)\mathrm{d}x=m(A).\end{aligned}$$

例10 设E是$\mathbf{R}^2$上的可测集，$E_x=\{y:(x,y)\in E\}$. 若$m(\{x:m(E_x)=1/2\})=1$. 证明：

$$m(\{y:m(\{x:(x,y)\in E\})\geqslant 1/2)>0.$$

证 由题设知

$$\int_0^1\int_0^1 \chi_E(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1 \chi_{E_x}(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 m(E_x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

用反证法. 设本题结论不成立,即对几乎所有的 y,有 $m(\{x:(x,y)\in E\})<\frac{1}{2}$,并记 $F_n=\{y:m(\{x:(x,y)\in E\})<1/2-1/n\}$,则 $[0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ 是零集,因而必有 $n\in\mathbf{N}$,使得 $m(F_n)>0$. 这时得到

$$\int_0^1\int_0^1 \chi_E(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_{[0,1]\setminus F_n}\int_0^1 \chi_E(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{F_n}\int_0^1 \chi_E(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\frac{1}{2}m([0,1]\setminus F_n)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)m(F_n)<\frac{1}{2}.$$

推出矛盾.

例 11 在 $E=[0,1]\times[0,1]$ 上函数 $f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. 证明:$\int_{(0,1)}\mathrm{d}x\int_{(0,1)}f(x,y)\mathrm{d}y\neq\int_{(0,1)}\mathrm{d}y\int_{(0,1)}f(x,y)\mathrm{d}x$.

证 令 $F(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$,则 $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=f(x,y)$. 故

$$\int_{(0,1)}f(x,y)\mathrm{d}x=F(x,y)\Big|_0^1=\frac{1}{1+y^2},$$

所以 $$\int_{(0,1)}\mathrm{d}y\int_{(0,1)}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{(0,1)}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\arctan y\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

类似令 $G(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$,则 $\frac{\partial}{\partial y}G(x,y)=f(x,y)$,故

$$\int_{(0,1)}f(x,y)\mathrm{d}y=G(x,y)\Big|_0^1=-\frac{1}{1+x^2},$$

所以 $$\int_{(0,1)}\mathrm{d}x\int_{(0,1)}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,1)}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\arctan x\Big|_0^1=-\frac{\pi}{4},$$

从而 $$\int_{(0,1)}\mathrm{d}x\int_{(0,1)}f(x,y)\mathrm{d}y\neq\int_{(0,1)}\mathrm{d}y\int_{(0,1)}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

这与富比尼定理不矛盾. 因为$f(x,y)$在$(0,1)\times(0,1)$上不可积,不满足定理条件.

事实上,当$0<y<1$时,有

$$\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_0^y=\frac{1}{2y},$$

而 $$\int_{(0,1)}|f(x,y)|\mathrm{d}x\geqslant\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x=\frac{1}{2y},$$

从而 $$\int_{(0,1)}\mathrm{d}y\int_{(0,1)}|f(x,y)|\mathrm{d}x\geqslant\int_{(0,1)}\frac{1}{2y}\mathrm{d}y.$$

知$|f(x,y)|$在E上不可积,即$f(x,y)$在E上不可积.

例 12 设f是$(0,a)$上的可积函数,$0<x<a$时,$g(x)=\int_x^a\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$. 证明:$g$也是$(0,a)$上的可积函数,且$\int_0^a g(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

证 因为$\int_0^a\mathrm{d}t\int_0^t\frac{|f(t)|}{t}\mathrm{d}x=\int_0^a|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$. 利用富比尼定理交换积分次序,可得

$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^a\frac{|f(t)|}{t}\mathrm{d}t=\int_0^a\mathrm{d}t\int_0^t\frac{|f(t)|}{t}\mathrm{d}x<\infty,$$

从而知可测函数g是$(0,a)$上的可积函数,且有

$$\int_0^a g(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^a\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^a\mathrm{d}t\int_0^t\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$$

例 13 对$f(x,y)=\mathrm{e}^{-y}\sin 2xy$交换关于$x,y$的积分次序,证明:

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-y}\frac{\sin^2 y}{y}\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\ln 5.$$

证 因为$y\neq0$时,$\int_0^1\mathrm{e}^{-y}\sin 2xy\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-y}\frac{\sin^2 y}{y}$. 等式右边函数在

$(0,\infty)$上勒贝格可积. 又$|e^{-y}\sin 2xy|\leqslant e^{-y}$,而$e^{-y}$在$[0,1]\times[0,\infty)$上可积,所以

$$\int_0^{\infty}dy\int_0^1 e^{-y}\sin 2xy\,dx=\int_0^1 dx\int_0^{\infty}e^{-y}\sin 2xy\,dy.$$

但有$\int_0^{\infty}e^{-y}\sin 2xy\,dy=\frac{2x}{1+4x^2}$,故得

$$\int_0^{\infty}e^{-y}\frac{\sin^2 y}{y}dy=\int_0^1\frac{2x}{1+4x^2}dx=\frac{1}{4}\ln 5.$$

例 14 设E是平面勒贝格可积集,$E=[0,1]\times[0,1]$,记$E_x=\{y:(x,y)\in E\}$,$E_y=\{y:(x,y)\in E\}$. 如果$m(E_x)\leqslant 1/2$在$[0,1]$上几乎处处成立. 证明:

$$m(\{y:m(E_y)=1\})\leqslant 1/2.$$

证 $\int_0^1\left[\int_0^1\chi_E(x,y)dy\right]dx=\int_0^1\left[\int_0^1\chi_{E_x}(y)dy\right]dx\leqslant\int_0^1\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}.$

记$S=\{y:m(E_y)=1\}$. 用反证法. 设$m(S)>1/2$,则依富比尼定理,有

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left[\int_0^1\chi_E(x,y)dy\right]dx\\&=\int_0^1\left[\int_0^1\chi_E(x,y)dx\right]dy=\int_0^1\left[\int_0^1\chi_{E_y}(x)dx\right]dy\\&\geqslant\int_S\left[\int_0^1\chi_{E_y}(x)dx\right]dy=\int_S dy=m(S)>1/2.\end{aligned}$$

推出矛盾. 故必有$m(\{y:m(E_y)=1\})\leqslant 1/2$.

例 15 设f,g均为$\mathbf{R}^1$上可积函数,证明:函数$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-x)g(x)dx$必为$\mathbf{R}^1$上的可积函数,且$\widetilde{f*g}=\tilde{f}\cdot\tilde{g}$,其中$\tilde{f}$表示$f$的傅里叶变换. 当$f,g$中有一个函数有界(不一定可积),另一个可积时. 证明:$f*g$是$\mathbf{R}^1$上的连续函数.

证 根据题设条件,两次积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(t-x)g(x)|dt\right]dx=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx<\infty$$

存在，故 $f(t-x)g(x)$ 的重积分存在，则

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-x)g(x)\mathrm{d}x$$

是 $\mathbf{R}^1$ 上的可积函数. 依富比尼定理交换积分次序，得

$$\begin{aligned}(f*g)(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t-x)g(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(t+x)}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}g(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha t}f(t)\mathrm{d}t=\tilde{f}(\alpha)\cdot\tilde{g}(\alpha).\end{aligned}$$

设 $|f|\leqslant M$，g 可积，则对任何 t,t_1，记 $\tau=t_1-t$，则有

$$\begin{aligned}|(f*g)(t)-(f*g)(t_1)|&\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)[g(t-x)-g(t_1-x)]|\mathrm{d}x\\&\leqslant M\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)-g(x-\tau)|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$\forall\ \varepsilon>0$，取 $N>0$，使得

$$M\left(\int_{-\infty}^{-N}|g(x)|\mathrm{d}x+\int_{N}^{\infty}|g(x)|\mathrm{d}x\right)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

利用本章第二节例 13 的结论，取 $\delta>0$，使 $|\tau|<\delta$ 时，有

$$M\int_{-N-1}^{N+1}|g(x)-g(x-\tau)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3},$$

于是，当 $|\tau|<\min\{\delta,1\}$ 时，有

$$\begin{aligned}&M\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)-g(x-\tau)|\mathrm{d}x\\&\leqslant M\int_{-N-1}^{N+1}|g(x)-g(x-\tau)|\mathrm{d}x\\&\quad+M\left(\int_{-\infty}^{-N-1}|g(x)|\mathrm{d}x+\int_{N+1}^{\infty}|g(x)|\mathrm{d}x\right)\\&\quad+M\left(\int_{-\infty}^{-N}|g(x)|\mathrm{d}x+\int_{N}^{\infty}|g(x)|\mathrm{d}x\right)\\&<\varepsilon+M\left(\int_{-\infty}^{-N}|g(x)|\mathrm{d}x+\int_{N}^{\infty}|g(x)|\mathrm{d}x\right)<\varepsilon,\end{aligned}$$

即知 $f*g$ 是连续的.

第五章　微分与不定积分

第一节　单调函数的可微性

主要内容

1. 设$E\subset \mathbf{R}^1$，$\Gamma=\{I_\alpha\}$是一个区间族，若对任意的$x\in E$以及$\varepsilon>0$，存在$I_\alpha\in\Gamma$，使得$x\in I_\alpha$，$|I_\alpha|<\varepsilon$，则称Γ是维他利(Vitali)意义下的一个覆盖，简称为E的维他利覆盖.

2. 维他利覆盖定理　设$E\subset\mathbf{R}^1$且$m^*(E)<\infty$. 若Γ是E的维他利覆盖，则对于任意的$\varepsilon>0$，存在有限个互不相交的$I_j\in\Gamma$ $(j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$m^*(E\setminus\bigcup_{j=1}^{n}I_j)<\varepsilon.$$

3. 设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}^1$中点x_0的一个邻域上的实值函数，令

$$D^+f(x_0)=\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D_+f(x_0)=\underline{\lim_{h\to0^+}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D^-f(x_0)=\overline{\lim_{h\to0^-}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D_-f(x_0)=\underline{\lim_{h\to0^-}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

分别称为$f(x)$在x_0点的右上导数，右下导数，左上导数，左下导数，总称为狄尼(Dini)(导)数.

$$D^+f(x_0)\geqslant D_+f(x_0),\quad D^-f(x_0)\geqslant D_-f(x_0),$$

$$D^+(-f)=-D_+(f),\quad D^-(-f)=-D_-(f).$$

若此四个狄尼数均等于同一有限值，则 $f(x)$ 在 x_0 点可微；若 $D^+f(x_0)=D_+f(x_0)$ 为有限值，则 $f(x)$ 在 x_0 的右导数存在；若 $D^-f(x_0)=D_-f(x_0)$ 为有限值，则 $f(x)$ 在 x_0 点的左导数存在.

4. 勒贝格定理 若 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的单调增加（实值）函数，则 $f(x)$ 的不可微点集为零测集，且有

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a).$$

5. 富比尼逐项微分定理 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的单调增加函数列，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x),\ \text{a. e.}\ ,x\in[a,b].$$

疑难解析

1. 维他利覆盖定理有什么意义？

答 维他利覆盖定理的意义相当于数学分析中有限覆盖定理的意义. 维他利覆盖定理指出：在 $E\in\mathbf{R}^1$ 且 $m^*(E)<\infty$ 时，对于任意的 $\varepsilon>0$，一定可以从 E 的维他利覆盖 Γ 中取得有限个不相交的 $I_j\in\Gamma\ (j=1,2,\cdots,n)$，使得 $m^*\big(E\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{n}I_j\big)<\varepsilon$.

2. 勒贝格定理说明什么问题？

答 在数学分析中，连续与可微的关系是大家熟悉的，在 $\mathbf{R}^1$ 上的某个函数在某个点可微，在该点必然连续. 反之则不然，维尔斯特拉斯还给出了处处连续但处处不可导的例子：

$$W(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b^n\cos(a^n\pi x),\ x\in\mathbf{R}^1.$$

其中 b 是一个奇数，$0<a<1,ab>1+3\pi/2$.

勒贝格定理是对单调函数而言的，它指出：单调函数是几乎处处可微的. 而且一般说来，这个结论是不能改进的.

方法、技巧与典型例题分析

例 1（富比尼定理） 设$\{f_n\}$是$[a,b]$上的一列单调增加函数，而且$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[a,b]$上处处收敛于$f(x)$. 证明：$f'=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'$在$[a,b]$上几乎处处成立.

证 可设$f_1(a)=f_2(a)=\cdots=0$，否则，用$\{f_n(x)-f_n(a)\}$代替$\{f_n(x)\}$即可. 设级数部分和$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)$，显然$S_n,f$都是单调增加函数，所以除去一个零集外，导数$f_1'(x),f_2'(x),\cdots,f'(x)$都存在. 由于$S_n(x)-S_{n-1}(x)=f_n(x),f(x)-S_n(x)=\sum_{i=n+1}^{\infty}f_i(x)$都是单调增加函数，它们的导数如果存在，必是非负的，故$x\overline{\in}E$时，$S_{n-1}'(x)\leqslant S_n'(x)\leqslant f'(x)$，即$\{S_n'(x)\}$是单调增加的有界数列，必有有限极限，也就是$\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n'(x)$当$x\overline{\in}E$时是收敛的. 因此只需证明，存在一个子列$\{S_{n_k}'\}$，有$\lim\limits_{k\to\infty}S_{n_k}'(x)=f'(x)$几乎处处成立.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(b)=f(b)$，对于$k\in\mathbf{N}$，取$n_k$使得$f(b)-S_{n_k}(b)<1/2^k$. 但是$f-S_{n_k}$也是单调增加函数，且$f(a)=S_{n_k}(a)=0$，所以

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\{f(x)-S_{n_k}(x)\}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\{f(b)-S_{n_k}(b)\}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1.$$

即级数$\sum_{n=1}^{\infty}(f-S_{n_k})$是由单调增加函数列$\{f-S_{n_k}\}$所构成的收敛级数. 应用关于$\sum f_n$的结论于$\sum(f-S_{n_k})$上，得$\sum_{n=1}^{\infty}\{f'(x)-S_{n_k}'(x)\}<\infty$几乎处处成立. 由于收敛级数的一般项趋于零，所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_{n_k}'(x)=f'(x)$几乎处处成立.

例 2 设$a<b,a'<b'$,有函数

$$f(x)=\begin{cases}ax\sin^2(1/x)+bx\cos^2(1/x), & x>0,\\ 0, & x=0,\\ a'x\sin^2(1/x)+b'x\cos^2(1/x), & x<0.\end{cases}$$

由于在区间$\frac{1}{(2n+2)\pi}<x<\frac{1}{2n\pi}$中,$\cos\frac{1}{x}$及$\sin\frac{1}{x}$可取$-1$与$+1$之间的一切值,所以

$$D^+f(0)=\sup_\theta(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)=b.$$

类似可求得$D_+f(0)=a,D^-f(0)=a',D_-f(0)=b'$.

例 3 对(a,b)中任意的零测集,可以作一个在$[a,b]$上单调增加的函数f,使得$x\in E$时,有$f'(x)=\infty$.

证 对任何$n\in\mathbf{N}$,取开集G_n,使$E\subset G_n$,且$m(G_n)<1/2^n$,利用G_n作函数f_n:

$$f_n(x)=m(G_n\cap[a,x]),\ x\in[a,b],\ n=1,2,\cdots$$

为验证f_n是单调增加函数,且对一切$x\in[a,b]$,$f_n(x)<1/2^n$,再作$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$,$x\in[a,b]$,$f(x)$是单调增加函数. 对于固定的$x\in E$和$N\in\mathbf{N}$,取$\delta>0$,使$(x-\delta,x+\delta)\subset G_n$,$n=1,2,\cdots,N$. 不妨设$(x-\delta,x+\delta)\subset(a,b)$,则当$|h|<\delta$时,有

$$\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}=1,\quad n=1,2,\cdots,N.$$

从而
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}=N.$$

由N的任意性,即得$f'(x)=\infty$.

例 4 $\theta(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$

在$[-1,1]$上不满足牛顿-莱布尼兹公式.

证 显然,$\theta'(x)=0(x\neq 0)$,因此$\int_{-1}^{1}\theta'(x)\mathrm{d}x=0$. 但是,$\theta(1)-\theta(-1)=1$,所以

$$\int_{-1}^{1}\theta'(x)\mathrm{d}x\neq\theta(1)-\theta(-1).$$

例 5 考察符号函数 $f(x)=\mathrm{sign}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的导数.

解

$$\overline{\lim_{x\to 0^+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\overline{\lim_{x\to 0^+}}\frac{1}{x}=\infty,$$

$$\underline{\lim_{x\to 0^+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\underline{\lim_{x\to 0^+}}\frac{1}{x}=\infty,$$

$$\overline{\lim_{x\to 0^-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\overline{\lim_{x\to 0^-}}-\frac{1}{x}=\infty,$$

$$\underline{\lim_{x\to 0^-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\underline{\lim_{x\to 0^-}}-\frac{1}{x}=\infty,$$

故 $D^+f(0)=D_+f(0)=D^-f(0)=D_-f(0)=\infty$,即 $f'(0)=\infty$.

例6 设 f 是 $[a,b]$ 上的单调增加函数,它取得 $[f(a),f(b)]$ 中的所有数作它的值. 证明:f 必是 $[a,b]$ 上的连续函数.

证 用反证法. 设 f 在 $x=c$ 间断,$a\leqslant c\leqslant b$,则两个开区间 $(f(c-0),f(c))$ 与 $(f(c),f(c+0))$ 中至少有一个在映射 f 下的原象是空集,与题设矛盾,故 f 必在 $[a,b]$ 上连续.

例7 设 E 是 $[a,b]$ 上无处稠密的正测度闭集,在 $[a,b]$ 上作严格单调增加的函数 $f(x)$,使 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处有连续导数,且在集 E 的一切点 $f'(x)=0$.

证 构造一个连续函数 $\varphi=d(x,E)$ (E 是直线 H 上的非空集,可以证明 $d(x,E)$ 在任一点 $x\in H$ 连续),在集 E 上等于零,在 E 外为正值. 记 $f(x)=\int_a^x\varphi(t)\mathrm{d}t$,则对一切 $x\in[a,b]$,有 $f'(x)=\varphi(x)$. 特别地,对一切 $x\in E$,$f'(x)=0$. 同时,$f(x)$ 是严格单调增加函数. 事实上,若取 $x_1,x_2\in[a,b]$,在这两点间存在一不含集 E 中点的区间 (α,β),则

$$f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\mathrm{d}t=\varphi(c)(\beta-\alpha).$$

其中$\alpha<c<\beta$. 因为$c\overline{\in}E$,则$\varphi(c)>0$,所以$f(x_2)>f(x_1)$.

例8 设f是$[a,b]$上的可测函数,$E\subset[a,b]$是可测集,且f在E上可微. 证明:$m^*(f(E))\leqslant\int_E|f'(x)|\mathrm{d}x$.

证 将E作如下分解:$\forall\ \varepsilon>0$,作

$E_n=\{x:|y-x|<1/n$ 时,有

$$|f(y)-f(x)|\leqslant(M+\varepsilon)|y-x|\}$$,则

$E_n\subset E_{n+1}, f(E_n)\subset f(E_{n+1})$. 利用第二章第二节例10的结果,知

$$\lim_{n\to\infty}m^*(E_n)=m^*(E),\ \lim_{n\to\infty}m^*(f(E_m))=m^*(f(E)).$$

于是,取(a,b)中覆盖E_n的开区间列$\{I_{n,k}\}$,使得对于$k=1,2,\cdots$,有

$$m(I_{n,k})<\frac{1}{n},\ \sum_{k=1}^{\infty}m(I_{n,k})<m^*(E_n)+\varepsilon.$$

当$x,y\in E_n\cap I_{n,k}$时,有$|f(x)-f(y)|<(M+\varepsilon)m(I_{n,k})$. 从而有

$$m^*(f(E_n))=m^*(f(E_n\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}I_{n,k}))\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(f(E_n\cap I_{n,k}))$$

$$\leqslant(M+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}m(I_{n,k})<(M+\varepsilon)(m(E_n)+\varepsilon).$$

即证明对$[a,b]$上的f, $E\subset[a,b]$,如果$f'(x)$在E上存在,且$|f'(x)|\leqslant M$,必有$m^*(f(E))\leqslant Mm^*(E)$.

利用上面已证明的事实来证本题的结论. 因为f'是E上的可测函数,$\forall\ \varepsilon>0$,作集合列

$$E_n=\{x:(n-1)\varepsilon\leqslant|f'(x)|\leqslant n\varepsilon\},\quad n=1,2,\cdots$$

则 $$m(f(E_n))\leqslant m\varepsilon\cdot m(E_n)\leqslant(n-1)\varepsilon\cdot m(E_n)+\varepsilon\cdot m(E_n)$$

$$\leqslant\int_{E_n}|f'(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon\cdot m(E_n),$$

从而$m^*(f(E))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(f(E_n))$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E}|f'(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)=\int_{E}|f'(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon\cdot m(E).$$

由 ε 的任意性，即得 $m^*(f(E))\leqslant\int_{E}|f'(x)|\mathrm{d}x$.

例 9 证明：存在[0,1]上的严格单调增加函数 $f(x)$，$f'(x)=0$, a.e. ,$x\in[0,1]$.

证 令 $(0,1)\cap\mathbf{Q}=\{r_n\}$，作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<r_n,\\ 1/2^n, & r_n\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\quad (n=1,2,\cdots)$$

易知 $f_n(x)$ 在[0,1]上单调增加，且 $f_n'(x)=0$, a.e. $x\in[0,1]$. 作函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

可见 $f(x)$ 是[0,1]上严格单调增加函数，且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. 则依富比尼逐项微分定理，有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)=0,\ \text{a.e.}\ ,x\in[0,1].$$

例 10 设 $f\in C((-\infty,\infty))$，且令

$$f_t(x)=f(x+t)-f(x),\ -\infty<x,t<\infty.$$

若对任意的 $t\in(-\infty,\infty)$，$f_t(x)$ 对 $x\in(-\infty,\infty)$ 可微. 证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上可微.

证 (1) $\forall\ x',x''=x'+t(-\infty<t<\infty)$，有

$$\begin{aligned}\frac{f(x''+h)-f(x'')}{h}&=\frac{f(x'+t+h)-f(x'+t)}{h}\\&=\frac{f(x'+t+h)-f(x'+t)-[f(x'+h)-f(x')]}{h}\\&\quad+\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}\\&=\frac{f_t(x'+h)-f_t(x')}{h}+\frac{f(x'+h)-f(x')}{h},\end{aligned}$$

故有 $$D_{\pm}^{\pm}f(x'')=f_t'(x')+D_{\pm}^{\pm}f(x').$$

且由 $f(x)$ 在一点可微推知 $f(x)$ 处处可微.

(2) $\exists$ 常数 k 以及 x_1，使 $D_-f(x_1)\geqslant k\geqslant D^+f(x_1)$. 则 $\forall\ x=x_1+t, t\in(-\infty,\infty)$，有

$$D_-f(x)=f_t'(x_1)+D_-f(x_1)\geqslant f_t'(x_1)+D^+f(x_1)=D^+f(x).$$

(3) 不妨设 $f(x)$ 不是上凸函数(则无可微点)，于是存在区间 $[a,b]$，使 $f(x)$ 位于点 $(a,f(a))$ 与点 $(b,f(b))$ 连接线的下方. 若记

$$F(x)=f(x)-lx,\ l=[f(b)-f(a)]/(b-a).$$

则易知 $\exists\ x_2\in(a,b)$，使得 $F(x)$ 在 $x=x_2$ 处取得最小值. 由此得出：

$$D^-F(x_2)\leqslant 0, \text{即} D^-f(x_2)\leqslant l;$$

$$D_+F(x_2)\geqslant 0, \text{即} D_+f(x_2)\geqslant l.$$

从而知 $\forall\ x\in(-\infty,\infty)$，有

$$D^-f(x)\leqslant D_+f(x).$$

(4) 综合上述结论，可得 $\forall\ x\in(-\infty,\infty)$，有

$$D_-f(x)=D^-f(x)=D_+f(x),$$

即 $f'(x)$ 有意义，从而 $f(x)$ 有可微点.

第二节　有界变差函数

主 要 内 容

1. 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数，作分割 $D: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记 $V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$. 如果对一切分割 D，有

$$\sup_D V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)<\infty,$$

则称 f 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，并称

$$\bigvee_a^b(f)=\sup_D V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)$$

为 f 在 $[a,b]$ 上的全变差. 其全体记为 $BV([a,b])$.

2. 有界变差函数有以下性质：

(1) 若f是$[a,b]$上的有界变差函数，则$f(x)$必在$[a,b]$上有界；

(2) 若f是$[a,b]$上的有界变差函数，则f在$[a,b]$的任一子区间上是有界变差函数；若$a<c<b$，f分别是$[a,c]$，$[c,b]$上的有界变差函数，则f是$[a,b]$上的有界变差函数，且

$$\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f).$$

(3) 若f,g都是$[a,b]$上的有界变差函数，α,β是常数，则$\alpha f+\beta g$，fg都是$[a,b]$上的有界变差函数. 即$BV([a,b])$构成一个线性空间.

3. 约当(Jordan)分解定理　$[a,b]$上的任一有界变差函数f必可表示为两个单调增加函数之差. 即若$f\in BV[a,b]$，当且仅当$f(x)=g(x)-h(x)$，其中$g(x)$，$h(x)$是$[a,b]$上单调增加函数.

4. 有界变差函数的不连续点至多是一个可列集；有界变差函数是黎曼可积的；有界变差函数几乎处处有有限导数；有界变差函数的导函数是勒贝格可积的.

疑难解析

约当分解定理有什么实际意义？

答　约当分解定理指出：$f(x)$是$[a,b]$上有界变差函数的充要条件是$f(x)$可以表示为两个单调增加函数之差.

充分性是明显的. 因为$[a,b]$上的单调函数必是有界变差函数(证明见例1)，而两个有界变差函数之差仍为有界变差函数.

必要性可以通过构造函数来实现. 作函数

$$g(x)=\frac{1}{2}\{\bigvee_a^x(f)+f(x)\},\quad h(x)=\frac{1}{2}\{\bigvee_a^x(f)-f(x)\}.$$

则由有界变差函数的性质知，当$x'>x$时，有

$$|f(x)-f(x')|=V_f(x,x')\leqslant\bigvee_x^{x'}(f)=\bigvee_a^{x'}(f)-\bigvee_a^x(f),$$

故 $\bigvee_a^x(f)+f(x)\leqslant\bigvee_a^{x'}(f)+f(x'),\ \bigvee_a^x(f)-f(x)\leqslant\bigvee_a^{x'}(f)-f(x')$.
即知 $g(x)$ 与 $h(x)$ 都是单调增加函数，且

$$f(x)=g(x)-h(x).$$

需要指出：约当分解不是惟一的.

有了约当分解，我们可以把对有界变差函数的研究转化为对单调增加函数的研究，从而将关于单调增加函数的若干结果推广到有界变差函数的情形.

方法、技巧与典型例题分析

讨论有界变差函数问题，首要的是要找出一个分割，将函数构造成有界变差函数. 其次是利用约当分解定理，化有界变差函数为两个单调增加函数之差，利用单调增加函数的一些结论来证明有关命题.

例 1 $[a,b]$ 上的单调函数必是有界变差函数.

证 只需证明，对任何分割 D，恒有 $\bigvee_a^b(f)\leqslant M$（常数）. 可设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，取 $M=f(b)-f(a)$.

对 $[a,b]$ 作任一分割 D，使得 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，则恒有

$$\bigvee_a^b(f)=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|=\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+1})-f(x_i)]$$
$$=f(x_n)-f(x_0)=f(b)-f(a)=M.$$

从而知 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

例 2 设 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 满足李卜西兹(Lipschitz)条件，即存在 $c>0$，使得对任何 $x,x'\in[a,b]$，均有 $|f(x)-f(x')|\leqslant c|x-x'|$，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

证 设 c 满足李卜西兹条件，取 $M=c(b-a)$. 则对 $[a,b]$ 的任一分割 D，恒有

$$\bigvee_a^b(f)=\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+1})-f(x_i)]\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}c|x_{i+1}-x_i|$$

$$=c\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=c(b-a)=M.$$

例 3 说明：连续函数不一定是有界变差函数.

解 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin(1/x), & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

显然 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数，若取分割 D：

$$x_0=0,\quad x_n=1,$$

$$x_i=1/[(n-1-i)\pi+\pi/2],\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

则 $V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i\sin(1/x_i)-(x_{i-1})\sin(1/x_{i-1})|$

$$>\sum_{k=1}^{n-2}\left[\frac{1}{k\pi+\pi/2}+\frac{1}{(k-1)\pi+\pi/2}\right]>\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}.$$

但是 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty$，所以 $\sup_D V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\infty$. 即 f 不是有界变差函数.

例 4 函数 $f(x)$ 为有界变差函数的充要条件是存在增函数 $\psi(x)$，使得当 $x_2>x_1$ 时，

$$f(x_2)-f(x_1)\leqslant\psi(x_2)-\psi(x_1).$$

证 必要性 设 $f(x)$ 为有界变差函数，则由约当分解定理，存在单调增加函数 $\varphi(x)$ 和 $g(x)$，使得 $f(x)=\varphi(x)-g(x)$.

令 $\psi(x)=\varphi(x)$，则 $\psi(x)$ 为增函数，且对 $x_2>x_1$，有

$$f(x_2)-f(x_1)=\psi(x_2)-\psi(x_1)-[g(x_2)-g(x_1)]$$
$$\leqslant\psi(x_2)-\psi(x_1).$$

充分性 令 $\varphi(x)=\psi(x)$，$g(x)=\psi(x)-f(x)$. 因为 $\varphi(x)$ 为单调增加函数，且对任意 $x_2>x_1$，有

$$g(x_2)-g(x_1)=\psi(x_2)-\psi(x_1)-[f(x_2)-f(x_1)]>0.$$

所以 $g(x)$ 是单调增加函数，而 $f(x)=\varphi(x)-g(x)$，从而知 $f(x)$ 可表示为两个单调增加函数之差，故依约当定理，$f(x)$ 为有界变差函数.

例5 证明:函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos(\pi/x), & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在[0,1]上是有界变差函数.

证 因为$f(x)$在[0,1]上处处连续,且在[0,1]上的一切点有导数

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cos(\pi/x)+\pi\sin(\pi/x), & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}$$

显然$f'(x)$在[0,1]有界,即

$$\begin{aligned}|f'(x)|&=|2x\cos(\pi/x)+\pi\sin(\pi/x)|\\&\leqslant|2x\cos(\pi/x)|+|x\sin(\pi/x)|\leqslant 2+\pi,\end{aligned}$$

而具有有界导数的函数是有界变差函数(见例7).

例6 求下列函数的全变差:

$$(1)\ f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 5, & x=1,\\ x+3, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}\qquad (2)\ f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1-x, & 0<x<1,\\ 5, & x=1.\end{cases}$$

解 (1) 因为$f(x)$在[0,1]上单调增加,故

$$\bigvee_0^1(f)=f(1)-f(0)=5,$$

又由有界变差的定义得$\bigvee_1^2(f)=2$.故

$$\bigvee_0^2(f)=\bigvee_0^1(f)+\bigvee_1^2(f)=2+5=7.$$

(2) 对[0,1]作分割D:

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1,$$

则

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&=|f(x_1)-f(x_0)|+\{|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots\\&\quad+|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|\}+|f(x_n)-f(x_{n-1})|\\&=(1-x_1)+\{x_{n-1}-x_1\}+\{5-(1-x_{n-1})\}\end{aligned}$$

$$=5+2\{x_{n-1}-x_1\}<7.$$

由于 $\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ 可以任意趋近 7. 即 $\sup_D\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=7$，故 $\bigvee_0^1(f)=7$.

例 7 证明：在 $[a,b]$ 上一切点有有界导数的函数是有界变差函数.

证 设在 $[a,b]$ 上处处有 $|f'(x)|\leqslant M$，则对 $[a,b]$ 的任一分割 $D: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 依拉格朗日中值公式有

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})|=|f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})|\leqslant M|x_k-x_{k-1}|,$$

其中 $x_{k-1}<\xi_k<x_k$. 所以

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant\sum_{k=1}^{n}M|x_k-x_{k-1}|$$

$$<M\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_{k-1}|=M(b-a).$$

从而知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有有界变差.

例 8 问下列函数是否 $[0,1]$ 上的有界变差函数：

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x^2), & 0<x\leqslant1,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

(2) $g(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x), & 0<x\leqslant1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 (1) f 不是有界变差函数. 对于分割 D：

$$0<\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{2n-1}}<\cdots<\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{3}}<\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{2}}<1,$$

相应的 $V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\sin1+\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$，从而 $\sup_D V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\infty$.

(2) g 是有界变差函数. 因为

$$g'(x)=\begin{cases}2x\sin(1/x)-\cos(1/x), & 0<x\leqslant1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

而 $|g'(x)|\leqslant|2x||\sin(1/x)|+|\cos(1/x)|\leqslant 3$. 则依例 7 知，$g$ 为有界变差函数.

例 9 设 f 定义于 $[a,b]$，且对任给 $\varepsilon>0$，有 $\bigvee_{a+\varepsilon}^{b}(f)\leqslant M$，其中 M 与 ε 无关. 证明：f 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

证 先证 f 在 $[a,b]$ 有界. 因为，对任何 $x\in[a,b]$，$|f(x)|\leqslant|f(b)|+|f(b)-f(x)|\leqslant|f(b)|+\bigvee_{a}^{b}(f)\leqslant|f(b)|+M$，所以，$f$ 在 $[a,b]$ 上有界.

又对 $[a,b]$ 的任一分割 D：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

$$
\begin{aligned}
V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)&=|f(x_1)-f(x_0)|+V_f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\
&\leqslant|f(x_0)|+|f(x_1)|+\bigvee_{x_1}^{b}(f)\\
&\leqslant|f(a)|+|f(b)|+2M.
\end{aligned}
$$

从而，f 是有界变差函数.

例 10 若 $\{f_n(x)\}\subset BV[a,b]$，$\bigvee_{a}^{b}(f_n)\leqslant M$，$n=1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，则 $f(x)\in BV[a,b]$.

证 对 $[a,b]$ 的任意分割 D：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，有

$$
\begin{aligned}
\bigvee_{a}^{b}(f)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|&=\sum_{i=1}^{n}\lim_{n\to\infty}|f_n(x_i)-f_n(x_{i-1})|\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|f_n(x_i)-f_n(x_{i-1})|\leqslant M.
\end{aligned}
$$

由分割的任意性知，$\bigvee_{a}^{b}(f)\leqslant M$，即 $f(x)\in BV[a,b]$.

例 11 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有有界变差. 证明：$F(x)=f(ax+b)$ $(a>0)$ 在 $[-b/a,(1-b)/a]$ 上有有界变差，且 $\bigvee_{0}^{1}(f)=\bigvee_{-b/a}^{(1-b)/a}(F)$.

证 用反证法. 设 $f(ax+b)$ 在 $[-b/a,(1-b)/a]$ 上有无界变差，则对任意 $N\in\mathbf{N}$，对 $[-b/a,(1-b)/a]$ 作分割 D_0：$-b/a=y_0<$

$y_1 < \cdots < y_n = (1-b)/a$，使得 $\sum_{k=1}^{n} |F(y_k) - F(y_{k-1})| > N$.

现用点 $\zeta_k = ay_k + b, 0 = \zeta_0 < \zeta_1 < \cdots < \zeta_n = 1$ 作为 $[0,1]$ 的一个分割，则

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k) - f(\zeta_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f(ay_k + b) - f(ay_{k-1} + b)|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |F(y_k) - F(y_{k-1})| > N.$$

由此可知，若 $F(x)$ 在 $[-b/a, (1-b)/a]$ 上有无界变差，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上也有无界变差，与假设矛盾.

例 12 证明：当且仅当集 $E \subset [a,b]$ 只有有限个边界点时，集 E 的特征函数 $\chi_E(x)$ 在 $[a,b]$ 上有有界变差.

证 若 E 只有有限个边界点，则 $\chi_E(x)$ 在任意开区间上有有界变差，这是明显的. 现证明若 E 有无穷多个边界点时，$\chi_E(x)$ 在 $[a,b]$ 上有无界变差. 对于任意 $N \in \mathbf{N}$，从 (a,b) 中的一切边界点组成的集中选出 N 个点并按其递增的次序排列：$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < b$. 对这些点作两两互不相交的邻域：$D(x_1), D(x_2), \cdots, D(x_N)$，且在这些邻域的每一个中取一对点 ξ_i 和 η_i，使 $\xi_i \in E, \eta_i \overline{\in} E$. 则

$$\bigvee_a^b \chi_E(x) \geqslant \sum_{i=1}^{N} |\chi_E(\eta_i) - \chi_E(\xi_i)| = N,$$

于是，函数 $\chi_E(x)$ 在线段 $[a,b]$ 上的变差可以大于任意预先给定的自然数 N，所以，变差为无穷.

例 13 设 f 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，证明：惟一存在在 (a,b) 上右连续的有界变差函数 g，使得 (1) 在 (a,b) 中 f 的连续点上，$f(x) = g(x)$；(2) $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$；(3) $\bigvee_a^b (g) \leqslant \bigvee_a^b (f)$.

证 对 $x \in (a,b)$，取 $g(x) = f(x+0)$.

(1) $x_0 \in (a,b)$ 是 f 的一个连续点，由于 $f(x_0) = f(x_0+0)$，所以就有 $g(x_0) = f(x_0+0) = f(x_0)$，即 $f(x) = g(x)$ 在 (a,b) 中 f 的连续点上成立.

(2) 再证g在(a,b)上右连续. 任取$x_0\in(a,b)$，对任何$\varepsilon>0$，必存在$\delta>0$，当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时有

$$f(x_0+0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0+0)+\varepsilon,$$

对$(x_0,x_0+\delta)$中每个点x，只要取$x_n\in(x,x_0+\delta)$，且$x_n\to x$，则立即可得$f(x_0+0)-\varepsilon\leqslant f(x+0)\leqslant f(x_0+0)+\varepsilon$，即当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$，亦即$g$在$x_0$处右连续，由$x_0$的任意性知，$g$在$(a,b)$上右连续.

(3)因为对$[a,b]$的任一分割$D:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，再取y_i，使$x_i<y_i<x_{i+1}$，$i=1,2,\cdots,n-1$. 由于$V_f(x_0,y_1,\cdots,y_{n-1},x_n)=\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$，若令$y_i\to x_i$，则从上式及$g(x_i)=\lim f(y_i)$，就有$V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$. 从而知$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$.

满足条件的g显然是由f惟一确定的.

例 14 若$f(x)$是$[a,b]$上的有界变差函数，且$f(x)\geqslant c$在$[a,b]$上处处成立. 证明：函数$1/f(x)$在$[a,b]$上也有有界变差.

证 对$[a,b]$的任一分割$D:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，因为$|f(x_i)|\geqslant c$，$|f(x_{i-1})|\geqslant c$，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{f(x_i)}-\frac{1}{f(x_{i-1})}\right|&=\sum_{i=1}^{n}\frac{|f(x_i)-f(x_{i-1})|}{|f(x_i)|\cdot|f(x_{i-1})|}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{|f(x_i)-f(x_{i-1})|}{c^2}\\&\leqslant\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|.\end{aligned}$$

取上确界，得$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\dfrac{1}{f(x)}\leqslant\dfrac{1}{c^2}\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}f(x)$. 从而知$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上也有有界变差.

例 15 证明：若$f(x)$在$[a,b]$上有有界变差，则$|f(x)|$在$[a,b]$上也有有界变差.

并问：反之是否也成立?

证 对$[a,b]$作任意分割$D:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，利用绝对

值不等式$|\alpha-\beta|\geqslant|\alpha|-|\beta|$，得

$$\sum_{i=1}^{n}\big||f(x_i)|-|f(x_{i-1})|\big|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant\bigvee_a^b(f).$$

所以，$|f(x)|$在$[a,b]$上有有界变差，且$\bigvee_a^b(|f|)\leqslant\bigvee_a^b(f)$.

反之不成立. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\text{ 为无理数},\\ 1, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

则$|f(x)|\equiv1$，所以$|f(x)|$在$[a,b]$上有有界变差，但$f(x)$在$[a,b]$上显然有无界变差.

例 16 设f是$[a,b]$上的有界变差函数，证明：几乎处处有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f)=|f'(x)|.$$

证 对任何$n\in\mathbf{N}$，作分割$D:a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{m_n}^{(n)}=b$，使得$\bigvee_a^b(f)-\sum_j|f(x_j^{(n)})-f(x_{j-1}^{(n)})|<\frac{1}{2^n}$.

作函数

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=a,\\ f(x)+C_k, & x_{k-1}^{(n)}\leqslant x\leqslant x_k^{(n)},\text{ 且 }f(x_k^{(n)})\geqslant f(x_{k-1}^{(n)}),\\ -f(x)+C_k, & x_{k-1}^{(n)}\leqslant x\leqslant x_k^{(n)},\text{ 且 }f(x_k^{(n)})<f(x_{k-1}^{(n)}),\end{cases}$$

其中C_k依次取值使$f_n(x)$在各分点合乎定义，则

$$|f(x_k^{(n)})-f(x_{k-1}^{(n)})|=f(x_k^{(n)})-f(x_{k-1}^{(n)})$$

$$\sum|f(x_k^{(n)})-f(x_{k-1}^{(n)})|=f_n(b)$$

$$\bigvee_a^b(f)-f_n(b)<\frac{1}{2^n}.$$

现证$x<x'$时，$\bigvee_x^{x'}(f)\geqslant f_n(x')-f_n(x)$. 当$x,x'$同属$[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}]$时，上式显然成立；否则，设$x<x_k^{(n)}<\cdots<x_p^{(n)}<x'$，则

$$\begin{aligned}\bigvee_x^{x'}(f)&\geqslant|f(x')-f(x_p^{(n)})|+\cdots+|f(x_k^{(n)})-f(x)|\\&=|f_n(x')-f_n(x_p^{(n)})|+\cdots+|f_n(x_k^{(n)})-f_n(x)|\end{aligned}$$

$$\geqslant |f_n(x')-f_n(x)|,$$

即 $\bigvee_a^x(f)-f_n(x)$ 单调. 因为 $\bigvee_a^x(f)-f_n(x)<\frac{1}{2^n}$,所以 $\sum_n(\bigvee_a^x(f)-f_n(x))$ 一致收敛.

由富比尼逐项求导定理,得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f)-f_n'(x)\right]=0,\ \text{a. e.}.$$

又依定义,几乎处处成立 $f_n'(x)=\pm f'(x)$. 因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f)\geqslant 0$,所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f)=|f'(x)|$, a. e..

例 17 设 f 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,证明:f 与 $\bigvee_a^x(f)$ 有相同的右(左)连续点.

证 当 $x<x'$ 时,由

$$|f(x)-f(x')|=V_f(x,x')\leqslant\bigvee_x^{x'}(f)=\bigvee_a^{x'}(f)-\bigvee_a^x(f)$$

知,$\bigvee_a^x(f)$ 的右(左)连续点必是 f 的右(左)连续点.

反过来,若 ξ 是 f 的右连续点($a\leqslant\xi\leqslant b$),则 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ 0<\delta\leqslant b-\xi$,使得当 $x\in(\xi,\xi+b)$ 时,有 $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon/2$. 又在 $[\xi,\xi+b]$ 上任取一分点组 $\xi=x_0<x_1<\cdots<x_n=\xi+b$,使得

$$\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|>\bigvee_\xi^{\xi+b}(f)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

这时,有

$$\begin{aligned}\bigvee_\xi^{x_1}(f)&=\bigvee_\xi^{\xi+b}(f)-\bigvee_{x_1}^{\xi+b}(f)\\&<\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\frac{\varepsilon}{2}-\sum_{i=2}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&=\frac{\varepsilon}{2}+|f(x_1)-f(\xi)|<\varepsilon,\end{aligned}$$

从而,当 $x\in(\xi,x_1)$ 时,有

$$\left|\bigvee_a^{\xi}(f)-\bigvee_a^{x}(f)\right|=\bigvee_{\xi}^{x}(f)<\varepsilon.$$

所以ξ是$\bigvee\limits_a^x(f)$的右连续的点．类似讨论左连续的情形．

例 18 设$f\in L([a,b])$，证明：$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 的全变差为$\bigvee\limits_a^b(F)=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$．

证 对$[a,b]$的任一分割$D:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，有

$$\sum_{i=1}^n|F(x_i)-F(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^n\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t.$$

即有
$$\bigvee_a^b(F)\leqslant\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t. \qquad ①$$

考虑若S为$[a,b]$上的一个阶跃函数：

$$S(x)=\sum_{i=1}^n C_i\chi_{(x_{i-1},x_i]}(x),\ x\in[a,b].$$

其中C_i为1或－1，则有

$$\int_a^b S(t)f(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^n C_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\sum_{i=1}^n\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$=\sum_{i=1}^n|F(x_i)-F(x_{i-1})|\leqslant\bigvee_a^b(F).$$

故我们在$[a,b]$上取一列阶跃函数$\{\varphi_n\}$，使$\{\varphi_n\}$几乎处处收敛于f．再利用$\{\varphi_n\}$作阶跃函数列

$$S_n(x)=\operatorname{sign}\varphi_n(x),\ n=1,2,\cdots.$$

则有
$$\int_a^b S_n(x)f(x)\mathrm{d}x\leqslant\bigvee_a^b(F).$$

另一方面又知　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)f(x)=|f(x)|$，a.e.，

故，依控制收敛定理，得

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)f(x)\mathrm{d}x\leqslant\bigvee_a^b(F), \qquad ②$$

综合①，②即得
$$\bigvee_a^b(F)=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

例 19 设 f 是$[0,a]$上的有界变差函数，证明：函数 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$也是$[0,a]$上的有界变差函数.

证 由题设知，f 是有界变差函数，故必可表为两个单调增加函数之差. 同时，必有常数c，使$f=f_1-f_2+c$，其中f_1 与f_2 均为单调增加函数，且 $f_1(0)=f_2(0)=0$. 则有

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f_1(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x}\int_0^x f_2(t)\mathrm{d}t+c.$$

这时，设 f 是非负单调增加函数，当 $i=1,2$ 时，证明$\frac{1}{x}\int_a^x f_i(t)\mathrm{d}t$ 是有界变差函数.

因为绝对函数之积仍为绝对连续函数，所以 $\frac{1}{x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[\varepsilon,a]$上绝对连续. 由于在$[\varepsilon,a]$上几乎处处有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}\geqslant 0,$$

可知$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是$[a,b]$上的单调增加函数. 由于ε 可取小于a 的正数，所以$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 又是$(0,a]$上的单调增加函数. 再利用$(0,a]$上的积分$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$，可知$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是$(0,a]$上的有界变差函数.

例 20 设$f\in BV([a,b])$，证明：弧长

$$l_f\geqslant\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

证 以$l_f(x)$记曲线$y=f(x)$在$[a,x]$上的弧长，则对$a\leqslant x<y\leqslant b$，有

$$l_f(y)-l_f(x)\geqslant\sqrt{(y-x)^2+[f(y)-f(x)]^2}>0,$$

即$l_f(x)$在$[a,b]$上单调增加. 由于

$$[l_f(y)-l_f(x)]/(y-x)\geqslant\sqrt{1+[(f(y)-f(x))/(y-x)]^2},$$

故 $$l_f'(x)\geqslant\sqrt{1+[f'(x)]^2},\ \text{a.e.},\ x\in[a,b].$$
从而得出
$$l_f(b)\geqslant\int_a^b l_f'(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

第三节　不定积分的微分

主 要 内 容

1. 设$f\in L([a,b])$，令$F_h(x)=\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t$（当$x\overline{\in}[a,b]$时，令$f(x)=0$），则有
$$\lim_{h\to0}\int_a^b|F_h(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

2. 设$f\in L([a,b])$，令$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$，则$F'(x)=f(x)$，a.e.，$x\in[a,b]$.

若$f\in L([a,b])$，则对$[a,b]$中几乎处处的点x，有
$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^h|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0,$$
将满足等式的点x称为勒贝格点.

若$f\in L([a,b])$，则称$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+c$ $(a\leqslant x\leqslant b)$为$f$的不定积分.

3. 设f,g均为$[a,b]$上的实值函数，对$[a,b]$的分割$D:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，及$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$，作和数（斯蒂尔吉斯和数）
$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})],$$
记$\delta(D)=\max|x_i-x_{i-1}|$. 如果当$\delta(D)\to0$时，不论$D$的分法与$\xi_i$的取法如何，上述和数的极限（有限）均存在，则称$f$关于$g$是黎曼-

斯蒂尔吉斯(Riemann-Stieltjes)可积,极限值称为 f 在 $[a,b]$ 上的关于 g 的黎曼-斯蒂尔吉斯积分,记做 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$.

4. 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数,g 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,则黎曼-斯蒂尔吉斯积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$ 存在.

疑难解析

如果 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $F'(x)=f(x)$, a.e.. 这与数学分析中变上限积分函数的导数 $\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'_x=f(x)$ 有何不同?

答 在数学分析中,要求 f 在 $[a,b]$ 上连续,则由变上限积分定义的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$,在 $[a,b]$ 上可导,且 $\Phi'(x)=f(x)$. 这时 Φ 是 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

在这里,虽然有相似的结论,但条件却不相同. 当 $f\in L([a,b])$ 时,令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则有 $F'(x)=f(x)$, a.e..

勒贝格可积的条件显然比连续要弱,而结论在数学分析中是处处成立的,在实变函数中只是几乎处处成立.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的有界可测函数,且对于每一个 $t\in\mathbf{R}^1$,有 $f(x)=f(x-t)$, a.e., $x\in\mathbf{R}^1$. 证明:存在常数 c,使得

$$f(x)=c,\ \text{a.e.},\ x\in\mathbf{R}^1.$$

证 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,显然有

$$F(b)-F(a)=F(b+s)-F(a+s),$$

以及 $F(t+s)=F(t)+F(s)$,从而有

$$F(t)=tF(1),\quad F'(t)=F(1)=f(t),\ \text{a.e.},\ t\in\mathbf{R}^1.$$

令 $F(1)=c$,即为所求.

例2 证明:对于有界可测函数,勒贝格点与近似连续点一致.

证 因为勒贝格点必为近似连续点,所以只要证出有界可测函数的近似连续点也是勒贝格点即可.

设 x_0 是 $f(x)$ 的近似连续点,所以存在集合 E 满足:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x)=f(x_0),\ \lim_{h\to 0}\frac{m(E\cap[x_0-h,x_0-h])}{2h}=1, \qquad ①$$

则
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2h}\int_{[x_0-h,x_0+h]\cap E}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x\\ &\quad+\frac{1}{2h}\int_{[x_0-h,x_0+h]\cap E}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x. \qquad ②\end{aligned}$$

由①式知,$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ h_0>0$,当 $0<h<h_0$ 时,若 $x\in E,|x-x_0|<E$,则有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon/2$,及 $\dfrac{m([x_0-h,x_0+h]\setminus E)}{2h}<\dfrac{\varepsilon}{4M}$,其中 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|<\infty$.

将上述结果代入②式,则当 $0<h<h_0$ 时,有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{m(E\cap[x_0-h,x_0+h])}{2h}+\frac{2M}{2h}\cdot m([x_0-h,x_0+h]\setminus E)\\ &\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{4M}\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x_0-h}^{x_0+h}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x=0$. 由此可得

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^{x+h}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x=0,$$

即 x_0 是 $f(x)$ 的勒贝格点.

例3 设在点 x_0,f 是其不定积分的导数. 证明:仅在此条件下,f 在 x_0 处不一定近似连续.

证 设有$[0,1)$上可测函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2n(n+1)}\leqslant x<\dfrac{1}{n}, \\ 1, & \dfrac{1}{n+1}\leqslant x<\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2n(n+1)}, \\ 0, & x=0.\end{cases}$$

知 $f(x)\in L([0,1))$. 令 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\varphi'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\varphi(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $0<h<1$，必有 $n_0\in\mathbf{N}$ 存在，使得 $1/(1+n_0)<h<1/n_0$，于是

$$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1+n_0}^{\infty}\int_{1/(i+1)}^{1/i}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1/(n_0+1)}^{h}f(x)\mathrm{d}x.$$

由 $f(x)$ 的定义知 $\int_{1/(i+1)}^{1/i}f(x)\mathrm{d}x=0,\ i=1,2,\cdots$. 故

$$\left|\int_0^h f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{1/(n_0+1)}^{h}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_0+1}=\frac{1}{n_0(n_0+1)}.$$

当 $h\to 0^+$ 时，$n_0\to\infty$，则有

$$0\leqslant\lim_{h\to 0^+}\frac{|\varphi(h)|}{h}\leqslant\lim_{n_0\to\infty}\frac{n_0+1}{n(n_0+1)}=0,$$

从而知 $\varphi(x)$ 的右导数存在且等于 $f(0)$，即 $\varphi'(0^+)=f(0)$.

当将 $f(x)$ 按偶函数延拓至 $(-1,0]$ 时，就得到定义于 $(-1,1)$ 中的函数. 用与上述相同的方法可以得出：$\varphi(x)$ 在 $x=0$ 的左导数存在，且 $\varphi'(0^-)=f(0)$. 于是知 $\varphi'(0)=f(0)=0$.

点 x 在 0 点的任意邻域 $(0,\pm\delta)$ 内，恒有 $|f(x)|=1$. 故对 $x=0$ 的任一稠密点集不可能有点列 x_n，使得当 $x_n\to 0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0=f(0)$. 所以 $x=0$ 一定不是 $f(x)$ 的近似连续点.

例4 设 $f_n(n=1,2,\cdots)$ 在 (a,b) 上可导，且导函数 f'_n 在 (a,b) 上均连续，又有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ \lim_{n\to\infty}f'_n(x)=F(x),\ x\in(a,b).$$

若 f' 与 F 在 (a,b) 上连续，证明：$f'(x)=F(x), x\in(a,b)$.

证 因为f'与F均在(a,b)上连续，所以只要证明在(a,b)的一个稠密子集上两者相等即可. 为此，只需证明在每个长度非零的$[\alpha,\beta]\subset(a,b)$上必有点$x$，使得$f'(x)=F(x)$.

由题设，$F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x)$，所以

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x:x\in[\alpha,\beta],f_n'(x)\leqslant F(x)+k,n=1,2,\cdots\}=[\alpha,\beta].$$

由f_n'及F的连续性知，$\{x:x\in[\alpha,\beta],f_n'(x)\leqslant F(x)+k,n=1,2,\cdots\}$是闭集. 于是，必有$k$及$(\gamma,\delta)\subset[\alpha,\beta]$，使得

$$(\gamma,\delta)\subset\{x:x\in[\alpha,\beta],f_n'(x)\leqslant F(x)+k,n=1,2,\cdots\}.$$

则依控制收敛定理，对任何$x\in(\gamma,\delta)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma^x f_n'(t)\mathrm{d}t=\int_\gamma^x F(t)\mathrm{d}t,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}(f_n(x)-f_n(\gamma))=\int_\gamma^x F(t)\mathrm{d}t$，从而有$f(x)-f(\gamma)=\int_\gamma^x F(t)\mathrm{d}t$. 对等式两边求导，即得

$$f'(x)=F(x).$$

例5 设$f(x),g(x)$为$[a,b]$上的函数，且$f(x)$关于$g(x)$的斯蒂尔吉斯积分存在，又设$x=x(t)$为$[\alpha,\beta]$上的严格单调递增的连续函数，且$x(\alpha)=a,x(\beta)=b$. 证明：在$[\alpha,\beta]$上$f(x(t))$关于$g(x(t))$的斯蒂尔吉斯积分存在，且

$$\int_\alpha^\beta f(x(t))\mathrm{d}g(x(t))=\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x).$$

证 已知$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$存在，故$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \lambda$，当分割$D:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$的最大子区间长度$d(D)<\lambda$(即$d(D)=\max\limits_{1<i<n}(x_i-x_{i-1})$)，有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1}))-\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)\right|<e. \qquad ①$$

其中$\xi_i\in[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n$.

又由题设知，$x(t)$一定一致连续，所以，对上面所给λ，存在$\delta>$

0，当$|t'-t''|<\delta$时，有

$$|x(t')-x(t'')|<\lambda.$$

对$[\alpha,\beta]$作分割$D^*:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta$，只要$d(D^*)=\max\limits_{1<i<m}(t_i-t_{i-1})<\delta$，则对应于$[a,b]$的分法：$a=x(t_0)<x(t_1)<\cdots<x(t_m)=b$，有$0<x(t_i)-x(t_{i-1})<\lambda$，以及对任意$\eta_i\in[t_{i-1},t_i]$有$x(\eta_i)\in[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,m$，这时满足①式成立的条件，从而由①得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(x(\eta_i))[g(x(t_i))-g(x(t_{i-1}))]-\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)\right|<\varepsilon.$$

因为分法D^*和在$[t_{i-1},t_i]$上取点ξ_i的任意性，上式说明$f(x(t))$关于$g(x(t))$的斯蒂尔吉斯积分存在，且

$$\int_\alpha^\beta f(x(t))\mathrm{d}g(x(t))=\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x).$$

例6 设$f(x)$在$[a,b]$上关于有界变差函数$\alpha(x)$的全变差函数$\pi(x)\triangleq\bigvee\limits_a^x(\alpha)$的斯蒂尔吉斯积分存在，则$f(x)$关于$\alpha(x)$的斯蒂尔吉斯积分存在，且满足

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}\bigvee_a^x(\alpha).$$

证 因为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\bigvee\limits_a^x(\alpha)$存在，知$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，对分割$D$，只要$d(D)<\delta$，就有

$$0\leqslant U(T,f,\alpha)-L(T,f,\alpha)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i,\Delta\pi_i<\frac{\varepsilon}{4}.$$

这里$U(T,f,\alpha)$与$L(T,f,\alpha)$分别为分割的达布上和与达布下和；$\Delta\pi_i=\pi(x_i)-\pi(x_{i-1})$，$\omega_i$为$f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的振幅.

任作分割$D_1:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$及$D_2$，使得$d(D_1)<\delta$，$d(D_2)<\delta$. 作$D=D_1\cup D_2:a=x_0'<x_1'<\cdots<x_m'=b$，其中$x_{k_i}'=x_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 从而有

$$|\sigma(T,\xi';f,\alpha)-\sigma(T_1,\xi;f,\alpha)|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} f(\xi_j')\Delta\alpha_j - f(\xi_i)\Delta\alpha_j\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i}|f(\xi_j')-f(\xi_i)|\cdot|\alpha(x_j')-\alpha(x_{j-1}')|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i}|\alpha(x_j')-\alpha(x_{j-1}')|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\bigvee_{\pi_{i-1}}^{\pi_i}(\alpha)<\frac{\varepsilon}{4}.$$

类似，对 D_2 及 $D=D_1\cup D_2$，也有

$$|\sigma(T,\xi';f,\alpha)-\sigma(T_2,\tilde{\xi};f,\alpha)|<\varepsilon/4.$$

合并此二分法，对任意分法 D_1,D_2，只要 $d(D_1)<\delta, d(D_2)<\delta$，并任意取点 $\xi,\tilde{\xi}$，就有

$$|\sigma(D_1,\xi;f,\alpha)-\sigma(D_2,\tilde{\xi};f,\alpha)|<\varepsilon/2. \qquad ①$$

由此可知，对 $\varepsilon_m=1/2^m$，存在 $\sigma_m>0$. 取 $[a,b]$ 的 2^{n_m} 等分，使 $(b-a)/2^{n_m}<\sigma_m$. 不妨设 $n_m<n_{m+1}$，对此分法取特定部分和 $\bar{\sigma}_m=\sum_{i=1}^{2^{n_m}}f(x_i)\Delta\alpha_i, m=1,2,\cdots$. 则由①可知

$$|\bar{\sigma}_{m+1}-\bar{\sigma}_m|<1/2^m,$$

所以 $\quad |\bar{\sigma}_{m+p}-\bar{\sigma}_m|\leqslant\sum_{i=1}^{p}|\bar{\sigma}_{m+i}-\bar{\sigma}_{m+i-1}|<\sum_{i=1}^{p}1/2^{m+i-1}<1/2^{m-1}.$

说明 $\{\bar{\sigma}_m\}$ 为柯西基本列. 故存在 $\lim\limits_{m\to\infty}\bar{\sigma}_m=A$.

再来证明：对于任意分法 D 与任意点 ξ，有

$$\lim_{d(D)\to 0}\sigma(D,\xi;f,\alpha)=A.$$

并由此可知 $f(x)$ 关于 $\alpha(x)$ 的斯蒂尔吉斯积分存在.

由 $\lim\limits_{m\to\infty}\bar{\sigma}_m=A$ 知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当 $m\geqslant N$ 时有 $|\bar{\sigma}_m-A|<\varepsilon/2$. 记 $\delta_1=(b-a)/2^{n_N}$. 不妨取 N 充分大，使得 $\delta_1<\delta$（δ 满足(1)式要求），从而由①式可得，对任给分法 D，只要 $d(D)<\delta$ 并取 $m\geqslant N$，就有

$$|\sigma(T,\xi;f,\alpha)-A|\leqslant|\sigma(D,\xi;f,\alpha)-\bar{\sigma}_m|+|\bar{\sigma}_m-A|$$
$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

即证明了 $$\lim_{d(D)\to 0}\sigma(D,\xi;f,\alpha)=A.$$

最后证明题设不等式成立.

若 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}\bigvee_a^x(\alpha)=\infty$，则不等式不成立.

若 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}\bigvee_a^x(\alpha)<\infty$，则有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)\right| &= \lim_{d(D)\to 0}\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1}))\right| \\ &\leqslant \lim_{d(D)\to 0}\sum_{i=1}^{m}|f(\xi_i)|\cdot|\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})| \\ &\leqslant \lim_{d(D)\to 0}\sum_{i=1}^{m}|f(\xi_i)|\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(\alpha)=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}\bigvee_a^x(\alpha),\end{aligned}$$

即证得不等式成立.

第四节 绝对连续函数与微积分基本定理

主要内容

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微，且 $f'(x)=0$，a.e.. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不是常数函数，则必存在 $\varepsilon>0$，使得对任意的 $\delta>0$，$[a,b]$ 内存在有限个互不相交的区间：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，其长度的总和小于 δ，使得

$$\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|>\varepsilon.$$

2. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数，若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$ 时，有 $\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数(或全连续函数).

3. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则一定是一致连续的.

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微，且其导函数是可积的. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，且 $f'(x)=0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上等于一个常数.

4. 若 $f(x)$，$g(x)$ 都是绝对连续函数，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$ 也都是绝对连续函数；若 $g(x)\neq 0$，则 $f(x)/g(x)$ 也是绝对连续函数.

5. 若 $f\in L([a,b])$，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\ (a\leqslant x\leqslant b)$ 是绝对连续函数.

6. 微积分基本定理　$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ 成立的充要条件是 $f(x)$ 为绝对连续函数.

7. 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的可积函数，$\alpha,\beta\in\mathbf{R}^1$，令

$$F(x)=\alpha+\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad G(x)=\beta+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

则 $$\int_a^b G(x)f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)F(x)\mathrm{d}x=F(b)G(b)-F(a)G(a)$$

称为分部积分公式.

8. 积分第一中值公式　若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负可积函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

9. 积分第二中值公式　若 $f\in L([a,b])$，$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

疑难解析

可以作为某一可积函数的不定积分的函数的特征是什么？

答 如果函数$F(x)$可以表示为：$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中$f$是可积函数，则$F$必为$[a,b]$上的连续函数. 并由上节例18知，$\bigvee_a^b(F)=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$，即$F$还是有界变差函数.

但是，并非每个连续的有界变差函数都可以表示为不定积分的形式. 不定积分$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$要求更强的连续性，即$F(x)$应该在$[a,b]$上绝对连续. 也就是：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当$[a,b]$中任意有限个互不相交的开区间$(x_i,y_i)$满足$\sum_{i=1}^n(y_i-x_i)<\delta$时，有$\sum_{i=1}^n|f(y_i)-f(x_i)|<\varepsilon$.

方法、技巧与典型例题分析

证明某个函数是否绝对连续函数，一般是用其定义来证，即依据题设条件分析推导，得到$\sum_{i=1}^n|f(y_i)-f(x_i)|<\varepsilon$. 也可以依充要条件(微积分基本定理，即牛顿-莱布尼兹公式)来证；还可以利用绝对连续函数的运算性质求证. 主要是学会分析题设条件，决定相应的证明方法.

例1 证明：在$[a,b]$上处处可微的单调函数是绝对连续函数.

证 因为$f(x)$是单调函数，所以$f'(x)$是可积函数，设

$$g_n(x)=\begin{cases}f'(x), & f'(x)\leqslant n,\\ n, & f'(x)>n.\end{cases}$$

则$g_n(x)\leqslant f'(x)$，且$g_n(x)$收敛于$f'(x)$.

令$G_n(x)=f(x)-\int_a^x g_n(x)\mathrm{d}x$. 则$G_n'(x)\geqslant 0$. 所以$G_n(x)\geqslant G_n(a)$，即$f(x)-f(a)\geqslant\int_a^x g_n(x)\mathrm{d}x$. 依控制收敛定理，得

$$f(x)-f(a)\geqslant\lim_{n\to\infty}\int_a^x g_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x.$$

类似可证 $$f(x)-f(a)\leqslant\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x.$$

于是可得 $f(x)-f(a)=\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x$，即牛顿-莱布尼兹公式成立，从而 $f(x)$ 是绝对连续函数.

例2 设 f 在 $[a,b]$ 上满足李卜西兹条件，证明：f 一定是绝对连续函数.

证 由题设知，存在 $M>0$，当 $x,x'\in[a,b]$ 时，有 $|f(x)-f(x')|\leqslant M|x-x'|$. 对任何 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon/M$，则对任意个区间(不论它们是否两两相交)，只要 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$，总有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}M(b_i-a_i)<\varepsilon.$$

所以 f 一定是绝对连续函数.

例3 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 可积，证明：$f(x)$ 的积分具有绝对连续性.

证 由题设知，对任意 $n\in\mathbf{N}$，$f(x)$ 在 $(-n,n)$ 上可积，极限 $\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}|f(x)|\mathrm{d}x$ 存在且为有限数. 所以，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，使得

$$\int_{(-\infty,N)}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3},\quad \int_{(N,\infty)}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}.$$

又由 $f(x)$ 在 $(-N,N)$ 上可积，依 $f(x)$ 在有限测度集上积分的绝对连续性知，存在 $\delta>0$，使得当 $m(e')<\delta(e'\subset(-N,N))$ 时，有

$$\left|\int_{e'}|f(x)|\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

设 e 是 $(-\infty,\infty)$ 上一个满足 $m(e)<\infty$ 的集，则

$$\int_e f(x)\mathrm{d}x=\int_{e\cap(-N,N)}f(x)\mathrm{d}x+\int_{e\cap(-\infty,-N)}f(x)\mathrm{d}x+\int_{e\cap(N,\infty)}f(x)\mathrm{d}x.$$

利用已证得三式，得

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{e\cap(-N,N)}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{e\cap(-\infty,-N)}|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$+\int_{e\cap(N,\infty)}|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.$$

从而命题成立.

例 4 设 f 是$[a,b]$上的有界变差函数，证明：f 是$[a,b]$上的绝对连续函数的充要条件为 $\bigvee\limits_a^b(f)$是绝对连续函数.

证 必要性 设f 是绝对连续的，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当$\{(a_i,b_i)\}$是有限个互不相交的小区间，且$\sum\limits_{i=1}^n(b_i-a_i)<\delta$ 时，$\sum\limits_{i=1}^n|f(b_i)-f(a_i)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

对$[a_i,b_i]$作分割 $a_i=x_0^{(i)}<x_1^{(i)}<\cdots<x_{k_i}^{(i)}=b_i$，使得 $\bigvee\limits_{a_i}^{b_i}(f)\leqslant\sum\limits_j|f(x_j^{(i)})-f(x_{j-1}^{(i)})|+\varepsilon/2^{i+1}$. 因为 $\sum\limits_i\sum\limits_j(x_j^{(i)}-x_{j-1}^{(i)})=\sum\limits_i(b_i-a_i)<\delta$，所以

$$\sum_i\sum_j|f(x_j^{(i)})-f(x_{j-1}^{(i)})|<\varepsilon/2,$$

从而 $\sum\limits_i\left|\bigvee\limits_a^{b_i}(f)-\bigvee\limits_a^{a_i}(f)\right|=\sum\limits_i\bigvee\limits_{a_i}^{b_i}(f)$

$$\leqslant\sum_i\sum_j|f(x_j^{(i)})-f(x_{j-1}^{(i)})|+\sum_i\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$$

$$<\varepsilon.$$

所以，$\bigvee\limits_a^b(f)$是绝对连续函数.

充分性 当 $\bigvee\limits_a^b(f)$绝对连续时，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当$\{(a_i,b_i)\}$是有限个两两互不相交的小区间，且$\sum\limits_i(b_i-a_i)<\delta$ 时，

$\sum_{i=1}^{n}|\bigvee_{a}^{b_i}(f)-\bigvee_{a}^{a_i}(f)|<\varepsilon$，即$\sum_{i=1}^{n}\bigvee_{a_i}^{b_i}(f)<\varepsilon$. 由于$|f(b_i)-f(a_i)|\leqslant \bigvee_{a_i}^{b_i}(f)$. 故

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\bigvee_{a_i}^{b_i}(f)\leqslant\varepsilon,$$

从而知f是绝对连续函数.

例 5 设f是$[0,1]$上的有界变差函数，对于任意$\varepsilon>0$，f是$[\varepsilon,1]$上的绝对连续函数，而且它在$x=0$处连续. 证明：f是$[0,1]$上的绝对连续函数.

证 由第二节例17知，函数f的连续点与$\bigvee_{0}^{x}(f)$的连续点是一致的. 因此，$\bigvee_{0}^{x}(f)$在$x=0$处连续. $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta_1>0$，使得当$0<x\leqslant\delta_1$时，$\bigvee_{0}^{x}(f)<\frac{\varepsilon}{2}$. 又$f$在$[\delta_1,1]$绝对连续，可取$\delta_2>0$，使$\sum_{i}(\beta_i-\alpha_i)<\delta_2$，且$\{(\alpha_i,\beta_i)\}$是$[\delta_1,1]$中有限个互不相交的开区间时，有$\sum_{i}|f(\beta_i)-f(\alpha_i)|<\varepsilon/2$. 这时，对$\{(a_k,b_k)\}$是$[0,1]$中有限个互不相交的开区间，在$\sum_{k}(b_k-a_k)<\min\{\delta_1,\delta_2\}$时，可以证明$\sum_{k}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$. 实际上，必要时可加入分点$\delta_1$，将和式$\sum_{k}|f(b_k)-f(a_k)|$表示为两部分的和，即$\sum_{k}|f(b_k)-f(a_k)|=\sum_{k}{}'|f(b_k)-f(a_k)|+\sum_{k}{}''|f(b_k)-f(a_k)|$，其中$\sum_{k}{}'$是对$\{(a_k,b_k):(a_k,b_k)\in[0,\delta_1]\}$求和，$\sum_{k}{}''$是对余下部分求和. 由于$\sum_{k}{}'|f(b_k)-f(a_k)|\leqslant\bigvee_{0}^{\delta_1}(f)<\frac{\varepsilon}{2}$，$\sum_{k}{}''|f(b_k)-f(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}$，故有$\sum_{k}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$，即$f$是$[0,1]$上的绝对连续函数.

例6 证明：函数F是$[a,b]$上的绝对连续函数的充要条件是，

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$,对任何一族互不相交的开区间$\{(a_i,b_i)\}$,只要$\sum\limits_i(b_i-a_i)<\delta$,总有$\sum\limits_i|F(b_i)-F(a_i)|<\varepsilon$.

证 充分性是显然的,因为它符合定义.

下证必要性. 设F绝对连续. $\forall\ \varepsilon>0$,取$\delta>0$,使得对任何有限个互不相交的开区间$\{(\alpha_i,\beta_i)\}$,当$\sum\limits_i(\beta_i-\alpha_i)<\delta$时,$\sum\limits_i|F(\beta_i)-F(\alpha_i)|<\varepsilon/2$. 现对任意一族互不相交的开区间$\{(a_k,b_k)\}$,$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\delta$,取$N\in\mathbf{N}$,则$\sum\limits_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\delta$,这时,$\sum\limits_{k=1}^{N}|F(b_k)-F(a_k)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是,由$N$的任意性,令$N\to\infty$,即得$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|F(b_k)-F(a_k)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

例7 设f是$[a,b]$上的有界变差且连续的函数,对$[a,b]$中的任何零测集E,$m(f(E))=0$. 证明:f是$[a,b]$上的绝对连续函数.

证 对$[a,b]$中任意一族互不相交的区间$\{(a_k,b_k)\}$,记$A_k=\{t:t\in[a_k,b_k],f'(t)存在\}$. 因为$f$是有界变差函数,故$f'$几乎处处存在,所以,$m([a_k,b_k]\setminus A_k)=0$. 从而$m(f([a_k,b_k]\setminus A_k))=0$. 而$f([a_k,b_k]\setminus A_k)\supset f([a_k,b_k])\setminus f(A_k)$,于是,$m(f([a_k,b_k]))=m(f(A_k))$.

利用第一节例8的结果,对任何k均有

$$m(f(A_k))\leqslant\int_{A_k}|f'(t)|\mathrm{d}t,$$

而f是连续函数,所以$|f(b_k)-f(a_k)|\leqslant m(f[a_k,b_k])$. 于是

$$\sum_k|f(b_k)-f(a_k)|\leqslant\sum_k m(f([a_k,b_k]))=\sum_k m(f(A_k))$$
$$\leqslant\sum_k\int_{A_k}|f'(t)|\mathrm{d}t=\sum_k\int_{a_k}^{b_k}|f'(t)|\mathrm{d}t.$$

因为$f'\in L([a,b])$,由积分的绝对连续性知,当$\sum\limits_k(b_k-a_k)$充分

小时，$\sum_k |f(b_k)-f(a_k)|$就充分小，即f是绝对连续函数.

将此例与例11相结合，就有以下结论：

设f是$[a,b]$上连续的有界变差函数，则f为绝对连续函数的充要条件是对$[a,b]$中任何零集E，均有$m(f(E))=0$.

例8 设g是$[a,b]$上的绝对连续函数，f定义于$(-\infty,\infty)$，且满足李卜西兹条件. 证明：$f\circ g$是$[a,b]$上的绝对连续函数.

证 由李卜西兹条件知，对任何$x,x'\in(-\infty,\infty)$，$|f(x)-f(x')|\leqslant M|x-x'|$. 且对$\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，取任何有限个互不相交的开区间$\{(a_i,b_i)\}$，当$\sum_i(b_i-a_i)<\delta$时，有$\sum_i|g(b_i)-g(a_i)|<\varepsilon/M$. 于是

$$\sum_i|(f\circ g)(b_i)-(f\circ g)(a_i)|\leqslant M\sum_i|g(b_i)-g(a_i)|<\varepsilon.$$

例9 举例说明：若f和g都是绝对连续函数，$f\circ g$不一定是绝对连续函数.

解 设$f(x)=x^{1/3}$，$x\in[-1,1]$.

$$g(x)=\begin{cases}x^3\cos^3(\pi/x), & x\in(0,1],\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则
$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}x\cos(\pi/x), & x\in(0,1],\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

因为$f\circ g$在$[0,1]$上的全变差为∞，所以不是有界变差函数，更非绝对连续函数.

但对f而言，当$t\neq 0$时，$f'(t)=\frac{1}{3}t^{-2/3}$. 因此，对一切$x\in[-1,1]$，有

$$\int_{-1}^x f'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_{-1}^x t^{-2/3}\mathrm{d}t=x^{1/3}+1=f(x)-f(-1).$$

满足牛顿-莱布尼兹公式，所以f是绝对连续函数.

对g而言，因为$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos^3(\pi/x)=0$，且$x\neq 0$时，有$g'(x)=3x^2\cos^3(\pi/x)+3x\sin(\pi/x)\cos^2(\pi/x)$，所以$|g'(x)|\leqslant 6$，

从而函数 g 满足李卜西兹条件，是绝对连续函数.

例 10 设 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上一列单调增加且绝对连续的函数，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛. 证明：其和函数是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

证 由于 f_n 绝对连续，所以

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(a) = \int_a^x \sum_{i=1}^{n} f_i'(t)\mathrm{d}t, \qquad ①$$

由于 f_n 单调增加，故 $f_n' \geqslant 0$. 又对任何 $n \in \mathbf{N}$，有

$$\sum_{i=1}^{n} \int_a^x f_i'(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^x f_i'(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} f_i(a) < \infty.$$

于是，由列维定理 $\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^x f_i'(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(t)\mathrm{d}t$. 在①式中令 $n \to \infty$，即得

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} f_i(a) = \int_a^x \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(t)\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{由逐项求导的富比尼定理}} \int_a^x \Big(\sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) \Big)' \mathrm{d}t.$$

也就是牛顿-莱布尼兹公式成立. 所以和函数是绝对连续的.

用绝对连续函数证明命题，主要是用绝对连续函数的等价命题，绝对连续与连续、可积、有界变差以及可导的关系. 所以，要分析证明命题需要什么条件，然后从这些条件与绝对连续的关系去寻找证明的途径与方法.

例 11 设 f 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，可测集 $E \subset [a,b]$，且 $m(E)=0$. 证明：$m(f(E))=0$.

证 由例 6 知，$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，使得对 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的区间列 $\{(a_k, b_k)\}$，当 $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ 时，$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

令$G=\bigcup_k(a_k,b_k)$，使得$m(G)<\delta$，$(a,b)\supset G\supset E\setminus(a,b)$. 再取$c_k,d_k\in[a_k,b_k]$，使得$f([a_k,b_k])=[f(c_k),f(d_k)]$. 于是有

$$\begin{aligned}m(f(E))&=m(f(E\setminus\{a,b\}))\leqslant m(f(G))\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|f(d_k)-f(c_k)|\leqslant\varepsilon,\end{aligned}$$

其中，利用了$\sum_k(d_k-c_k)\leqslant\sum_k(b_k-a_k)<\delta$.

例 12 设F是$[a,b]$上的绝对连续函数，证明：F必为有界变差函数.

证 因为F是绝对连续的，对$\varepsilon=1$，存在$\delta>0$，对任意有限个互不相交的开区间$\{(a_k,b_k)\}$，仅当$\sum_k(b_k-a_k)<\delta$，便有$\sum_k|F(b_k)-F(a_k)|<1$. 取$n\in\mathbf{N}$，使得$(b-a)/N<\delta$. 把$[a,b]N$等分，得分点组$a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$. 对$[x_{i-1},x_i]$上任意一组分点$x_{i-1}=y_0<y_1<\cdots<y_m=x_i$，由于$\sum_j(y_j-y_{j-1})<\delta$，所以$V_F(y_0,y_1,\cdots,y_m)<1$. 这样就有$\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(F)\leqslant 1$，从而$\bigvee_a^b(F)=\sum_{i=1}^{N}\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(F)\leqslant N$. 即$F$是有界变差函数.

例 13 若$f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，且几乎处处存在非负导数. 证明：$f(x)$为$[a,b]$上的单调不减函数.

证 因为$f(x)$在$[a,b]$上绝对连续，所以$f'(x)$在$[a,b]$上可积，且对$[a,b]$上任意两点$x_1<x_2$，依牛顿-莱布尼兹公式，成立

$$f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f'(x)\mathrm{d}x. \qquad ①$$

又在$[a,b]$上几乎处处有$f'(x)\geqslant 0$，故依积分的单调性知$\int_{x_1}^{x_2}f'(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_1}^{x_2}0\mathrm{d}x=0$. 于是由①式得

$$f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0\Longrightarrow f(x_2)\geqslant f(x_1),$$

即$f(x)$是单调不减函数.

例 14 设$\{g_k\}$是$[a,b]$上一列绝对连续函数，若(1) 存在$c\in[a,b]$，使级数$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(c)$收敛；(2) $\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b|g_k'(x)|\mathrm{d}x<\infty$. 证明：$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(x)$在$[a,b]$上收敛，若其极限为$f$，则$f$是$[a,b]$上的绝对连续函数，且$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k'(x)$, a.e..

证 由题设中(2)，利用列维定理可知，$\sum_{k=1}^{\infty}|g_k'(x)|$是可积的，从而有$G(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k'(x)$，$x\in[a,b]$，是$[a,b]$上的可积函数，且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_c^x\sum_{k=1}^{n}g_k'(t)\mathrm{d}t=\int_c^x G(t)\mathrm{d}t.$$

因为每个g_k都是绝对连续的，所以

$$g_k(x)=\int_c^x g_k'(t)\mathrm{d}t+g_k(c),\ x\in[a,b].$$

于是 $$\sum_{k=1}^{n}g_k(x)=\int_c^x\sum_{k=1}^{n}g_k'(t)\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n}g_k(c),\quad n=1,2,\cdots.$$

令$n\to\infty$，得 $$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(x)=\int_c^x G(x)\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n}g_k(c).$$

令$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(x)=f(x)$，即有

$$f(x)=\int_c^x G(t)\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{\infty}g_k(t).$$

从而知f在$[a,b]$上绝对连续，且

$$f'(x)=G(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k'(x),\ \text{a.e.}.$$

例 15 证明：函数

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x^2), & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$[-1,1]$上处处可微，但不绝对连续.

证 因为

$$F'(x)=\begin{cases}2x\sin(1/x^2)-(2/x)\cdot\cos(1/x^2), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

所以，$F(x)$在$[-1,1]$上处处可微.

通过证明$F'(x)$不可积，可知$F(x)$不绝对连续. 故只要证$(2/x)\cdot\cos(1/x^2)$在$[-1,1]$上不可积即可. 当$[(2n+1/3)\pi]^{-1/2}\leqslant x\leqslant[(2n-1/3)\pi]^{-1/2}$时，有$|\cos(1/x^2)|\geqslant 1/2$，这时$|(2/x)\cos(1/x^2)|\geqslant(1/x)$.

记$I_n=[\{(2n+1/3)\pi\}^{-1/2},\{(2n-1/3)\pi\}^{-1/2}]$，可知$\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\subset(0,1)\subset(-1,1)$，且

$$\int_{I_n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\left(\frac{2n-1/3}{2n+1/3}\right)^{-1/2},$$

于是 $$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{2n+1/3}{2n-1/3}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{2/3}{2n-1/3}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{2/3}{2n-1/3}}{1+\frac{2/3}{2n-1/3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n+1}.$$

不等号仅因为当$x>0$时，$\ln(1+x)>x/(1+x)$.

显然级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n+1}$发散. 从而知$\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$在$\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$上不可积，于是在$[-1,1]$上不可积，即得出$F'(x)$在$[-1,1]$上不可积. 所以$F(x)$不是绝对连续函数.

例 16 设$\{g_n\}$是$[a,b]$上一列绝对连续函数，F在$[a,b]$上勒贝格可积，若在$[a,b]$上几乎处处有：

$$|g_n'(x)|\leqslant F(x),\ n=1,2,\cdots.$$

$$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=g(x),\quad \lim_{n\to\infty}g_n'(x)=f(x).$$

证明：$g'(x)=f(x)$几乎处处成立.

证 因为g_n是绝对连续函数，所以有

$$g_n(x)-g_n(a)=\int_a^x g_n'(x)\mathrm{d}x,\ x\in[a,b].$$

令$n\to\infty$,由题设并依控制收敛定理得

$$g(x)-g(a)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

依充要条件知,g 是绝对连续函数,因而几乎处处存在有限导数,又因为不定积分的导数几乎处处等于被积函数,故对上式两边求导,得

$$g'(x)=f(x)$$

在$[a,b]$上几乎处处成立.

由一系列例题可以认识到:绝对连续是比连续与有界变差更强的概念. 绝对连续一定连续且有有界变差. 而连续不一定有有界变差,有界变差函数不一定连续,既连续又有有界变差的函数也不一定绝对连续. 但绝对连续与李卜西兹条件比,是李卜西兹条件更强些. 满足李卜西兹条件一定绝对连续,反之则不然,如$f(x)=\sqrt{x}$在$[0,1]$上绝对连续,但不满足李卜西兹条件(关键在于李卜西兹条件要求$\{(a_k,b_k)\}$是任意的).

例 17 作一无处单调的绝对连续函数.

解 在$[0,1]$中作点集E,使得对$[0,1]$中任一区间都有

$$m(I\cap E)>0,\quad m(I\cap E^C)>0.$$

于是,再作$[0,1]$上的绝对连续函数

$$f(x)=\int_0^x[\chi_E(t)-\chi_{E^C}(t)]\mathrm{d}t.$$

因为,对$[0,1]$中任一区间I,存在$x_1\in I\cap E$,$x_2\in I\cap E$,使得

$$f'(x_1)=\chi_E(x_1)-\chi_{E^C}(x_1)=1>0,$$
$$f'(x_2)=\chi_E(x_2)-\chi_{E^C}(x_2)=-1<0.$$

故知$f(x)$在I上不是单调函数.

例 18 证明:若$f(x)$在$[a,b]$上绝对连续,则

$$\text{弧长}\ l(f)=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

证 由本章第二节例20知，只需证明

$$l(f)\leqslant\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

$\forall\ \varepsilon>0$，作$[a,b]$的分割D，使$l_D(f)\geqslant l(f)-\varepsilon$. 再作$g\in C([a,b])$，使得

$$\int_a^b |f'(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

令$G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，易知$|l_D(f)-l_D(G)|<\varepsilon$. 由

$$|\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{1+\beta^2}|\leqslant|\alpha-\beta|,$$

$$\left|\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x-\int_a^b \sqrt{1+[g(x)]^2}\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\int_a^b |f'(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon,$$

可知 $$l_D(f)<l_D(G)+\varepsilon\leqslant\int_a^b \sqrt{1+[G'(x)]^2}\mathrm{d}x+\varepsilon$$

$$=\int_a^b \sqrt{1+[g(x)]^2}\mathrm{d}x+\varepsilon\leqslant\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}+2\varepsilon.$$

又由$l_D(f)>l(f)-\varepsilon$，可得出

$$l(f)\leqslant\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}+3\varepsilon,$$

即命题成立.

例 19 设$f\in L([c,d])$，$c<a<b<d$，若

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=O(|h|),h\to 0.$$

证明：$f(x)=g(x)$，a. e.，$x\in[a,b]$，其中$g\in BV([a,b])$.

证 作$[a,b]$上的函数列

$$f_n(x)=n\int_x^{x+1/n} f(t)\mathrm{d}t,\ n=1,2,\cdots$$

则 $$\int_a^b |f_n(x+h)-f_n(x)|\mathrm{d}x$$

$$=n\int_a^b \left|\int_0^{1/n}[f(x+h+t)-f(x+t)]\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_0^{1/n} \left(\int_a^b |f(x+h+t) - f(x+t)| \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$

$$= O(|h|), h \to 0 (\text{对 } n \text{ 一致}).$$

因为 $f_n' \in L^1([a,b])$，且 $\exists\ M > 0$，使得

$$\int_a^b |f_n'(x)| \mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{h\to 0} \int_a^b \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \right| \mathrm{d}x \leqslant M,$$

所以，对$[a,b]$的任一分割

$$D: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

及一切 n，有

$$\sum_{i=1}^{n} |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_n'(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f_n'(x)| \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b |f_n'(x)| \mathrm{d}x \leqslant M.$$

从而

$$\bigvee_a^b (f_n) \leqslant M \ (n = 1, 2, \cdots).$$

由于存在在$[a,b]\backslash Z\,(m(Z)=0)$上的点收敛于 $f(x)$ 的点列 $\{f_n(x)\}$，故对分点不属于 Z 的分割，由

$$\sum_{i=1}^{n} |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})| \leqslant M,$$

令 $n \to \infty$ 可得

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant M,$$

即命题成立.

第六章 $L^p(p \geqslant 1)$ 空间

第一节 L^p 空间的定义与不等式

主要内容

1. (1) 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，记

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, \quad 0 \leqslant p < \infty.$$

以 $L^p(E)$ 表示一切使 $\|f\|_p < \infty$ 的 f，称为 $L^p(1 \leqslant p < \infty)$ 空间(前面所说 $L(E)$ 即 $L^1(E)$).

(2) 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，$m(E) > 0$. 若存在 M，使 $|f(x)| \leqslant M$, a.e.，$x \in E$，则取一切 M 的下确界，记作 $\|f\|_\infty$，称为 $|f(x)|$ 的本性上界. 并称 $f(x)$ 是本性有界的. 以 $L^\infty(E)$ 记在 E 上本性有界函数的全体.

2. 若 $f, g \in L^p(E)$，α, β 是实数，则 $\alpha f + \beta g \in L^p(E)$. 即 $L^p(E)$ 构成一个线性空间.

3. 共轭指标　若 $p, p' > 1$，且 $1/p + 1/p' = 1$，则称 p 与 p' 为共轭指标(数). 因为 $p' = p/(p-1)$，故 $p = 2$ 时，$p' = 2$；$p = 1$ 时，规定 $p' = \infty$；$p = \infty$ 时，规定 $p' = 1$.

4. 赫尔德(Hölder)不等式　设 p 与 p' 为共轭指标，若 $f \in L^p(E)$，$g \in L^{p'}(E)$，则

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \qquad ①$$

即　$\int_E |f(x)g(x)| \mathrm{d}x$

$$\leqslant \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_E |g(x)|^{p'} \mathrm{d}x\right)^{1/p'}, \ 1 < p < \infty$$

及 $$\int_E |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \|g\|_\infty \int_E |f(x)|\mathrm{d}x, \ p = 1. \qquad ②$$

赫尔德不等式对 $\|f\|_p$ 或 $\|g\|_{p'} = \infty$ 也成立.

赫尔德不等式当 $p = p' = 2$ 时称为许瓦兹(Schwartz) 不等式,即

$$\int_E |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_E |g(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

5. 闵可夫斯基(Minkowski) 不等式　若 $f, g \in L^p(E)$ $(1 \leqslant p < \infty)$,则

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

6. 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 若 $f_k \in L^p(E)$ $(k = 1,2,\cdots)$,且级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛,则

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p.$$

7. 对 $p \geqslant 1$,若 $|f|^p$ 在可测集 E 上可积,则称 f 是 E 上的 p 幂可积函数,所有 p 幂可积函数构成的类称为 L^p 空间,记为 $L^p(E)$ 或 L^p. 这是 L^p 空间的另一种定义方式.

对于 $f \in L^p$,称 $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$ 为 f 的范数.

8. E 上的可测函数 f,若满足 $\int_E |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty$,则称 f 为平方可积函数,即 $p = 2$. E 上所有平方可积函数组成的集合即 L^2.

L^2 中的函数必属于 L,即 $L^2 \subset L$. 其中 L 表示所有勒贝格可积函数的集合.

若 $f, g \in L^2$,α, β 是任意两个实数,则

(1) $f \cdot g$ 是可积函数,即 $fg \in L$;

(2) $\alpha f + \beta g$ 是平方可积函数,即 $\alpha f \pm \beta g \in L^2$. 所以,$L^2$ 是实数域上的线性空间.

疑难解析

1. 怎样理解 $L^p(p \geqslant 1)$ 空间？

答 对定义在 E 上的可测函数 $f(x)$，若 $\left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$ 存在，则记做 $\|f\|_p$，使 $\|f\|_p < \infty$ 的 f 的全体组成 L^p 空间.

$\|f\|_p$ 也称为 f 的范数，满足范数公理：

(1) $\|f\|_p \geqslant 0$（等号当且仅当 $f \sim 0$ 时成立）；

(2) $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$，$\alpha$ 是一个数；

(3) $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$，$f, g \in L^p$.

对于 $f, g \in L^p$，称 $\|f-g\|_p$ 为 f 与 g 之间的距离，满足距离公理（见下节），所以 L^p 是距离空间.

2. 本性有界函数与 L^p 空间有何关系？

答 L^p 空间（$1 \leqslant p < \infty$）是由 $\|f\|_p < \infty$ 的一切 f 组成的. 而本性有界函数是使 $|f| < M$, a.e.，且 M 的下确界 $\|f\|_\infty$ 存在的函数 f. 两者对 E 上的可测函数 f 有不同的要求.

在 E 上的本性有界函数的全体记做 $L^\infty(E)$，简记为 L^∞. 而将条件记做 $\inf\limits_{m(e)=0} \sup\limits_{x \in E \setminus e} |f(x)| < \infty$. 对 $f \in L^\infty$，称 $\|f\|_\infty = \inf\limits_{m(e)=0} \sup\limits_{x \in E \setminus e} |f(x)|$ 为 f 的范数，当 $m(E) < \infty$ 时，有 $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

方法、技巧与典型例题分析

理解 L^p 空间的基本概念，掌握其几个不等式的应用是本节所应能达到的.

例 1 证明：许瓦兹不等式

$$|(f,g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$$

中等式成立的充要条件是 f 与 g 线性相关.

证 **充分性** 设 f 与 g 线性相关，不妨设 $f = ag$，于是

$$|(f,g)| = \left|\int_a^b ag \cdot g\mathrm{d}x\right| = |a|\int_a^b g^2\mathrm{d}x = |a| \cdot \|g\|^2$$
$$= \|ag\| \cdot \|g\| = \|f\| \cdot \|g\|.$$

必要性 设 $|(f,g)| = \|f\| \cdot \|g\|$. 若 $g = 0$,显然 f 与 g 线性相关,则结论成立. 现设 $g \neq 0$,则对任意 a,有

$$0 \leqslant \|f - ag\|^2 = (f - ag, f - ag)$$
$$= (f,f) - 2a(f,g) + a^2(g,g).$$

取 $a = (f,g)/(g,g)$,则上式变成

$$0 \leqslant \|f - ag\|^2 = (f,f) - |(f,g)|^2/(g,g)$$
$$= \|f\|^2 - |(f,g)|^2/(g,g). \qquad ①$$

由题设 $|(f,g)| = \|f\| \cdot \|g\|$ 两端平方,得

$$|(f,g)|^2 = \|f\| \cdot \|g\|^2 \Longrightarrow \|f\|^2 - |(f,g)|/\|g\|^2 = 0.$$

从而 ① 式右端为 0. 于是 $\|f - ag\| = 0$. 即 $f = ag$,亦即 f 与 g 线性相关.

例 2 设 $E = (0,1)$,证明:

(1) $\ln\dfrac{1}{x} \in L^p(E), \ln\dfrac{1}{x} \overline{\in} L^\infty(E)$;

(2) $x^{-1/p} \in L^{p-\alpha}(E)(0 < \alpha < p), x^{-1/p} \overline{\in} L^p(E)$;

(3) $x^{-1/p}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{-2/p} \overline{\in} L^{p+\alpha}(E)(\alpha > 0)$,

$$x^{-1/p}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-2/p} \overline{\in} L^p(E).$$

证 (1) 取 $0 < q < 1$,则由

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p}{(1/x)^q} = \lim_{y\to\infty}\frac{(\ln y)^p}{y^q} = 0$$

可知 $\displaystyle\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x < \infty, \ln\left(\frac{1}{x}\right) \in L^p(E)$. 又由

$$m\left\{x \in (0,1) \,\middle|\, \left|\ln\frac{1}{x}\right| > M\right\}$$
$$= m\left\{x \in (0,1) \,\middle|\, -\ln x = \ln\frac{1}{x} > M\right\}$$

$$= m\{x \in (0,1) | 0 < x < \mathrm{e}^{-M}\} = \mathrm{e}^{-M} > 0.$$

可得$\left|\ln \frac{1}{x}\right| \not\leqslant M$. 故 $\ln \frac{1}{x} \underset{m}{\not\leqslant} M$,从而 $\ln \frac{1}{x} \,\overline{\in}\, L^{\infty}(E)$.

(2) 当 $0 < 1 - \alpha/p < 1$ 时,由

$$\int_0^1 (x^{-1/p})^{p-\alpha}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-(1-\alpha/p)}\mathrm{d}x < \infty$$

推出 $x^{-1/p} \in L^{p-\alpha}(E)$. 故由

$$\int_0^1 (x^{-1/p})^p \mathrm{d}x = \int_0^1 (1/x)\mathrm{d}x = \ln x \Big|_0^1 = \infty$$

知 $x^{-1/p} \,\overline{\in}\, L^p(E)$.

(3) 可以由

$$\int_0^1 \left[x^{-1/p}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{-2/p}\right]^p \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x^{-1}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{-2}\mathrm{d}x \xlongequal{y=1/x} \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y(\ln y)^2}$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}\ln y}{(\ln y)^2} = -(1/\ln y)\Big|_1^{\infty} = \infty$$

或者在 $x = 1$ 处有

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\left[x^{-1/p}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{-2/p}\right]^p}{1/(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} x^{-1}\frac{x-1}{(\ln x)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2\ln x \cdot (1/x)} = -\infty,$$

以及$\int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ 发散,立即得知$\int_{1/2}^1 \left[x^{-1/p}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{-2/p}\right]^p \mathrm{d}x$ 发散,$\int_0^1 \left[x^{-1/p}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{-2/p}\right]^p \mathrm{d}x$ 发散. 因而 $x^{-1/p}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{-2/p} \,\overline{\in}\, L^p(E)$.

同理,可以由

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\left[x^{-1/p}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{-2/p}\right]^{p+\alpha}}{1/(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} x^{-\frac{p+\alpha}{p}} \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{(\ln x)^{2(1+\alpha/p)}}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2(1+\alpha/p)(\ln x)^{1+2\alpha/p} \cdot (1/x)} = -\infty$$

得到$\int_0^1\left[x^{-1/p}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-2/p}\right]^{p+\alpha}\mathrm{d}x$ 发散，从而 $x^{-1/p}\cdot\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-2/p}\overline{\in}$ $L^{p+\alpha}(E)$.

由此可知，此三个命题是密切相关的.

例 3 若 $f\in L^r(E)\cap L^s(E)$，且令 $0<\lambda<1,1/p=\lambda/r+(1-\lambda)/s$，证明：$\|f\|_p\leqslant\|f\|_r^{\lambda}\cdot\|f\|_s^{1-\lambda}$.

证 当 $r<s<\infty$ 时，利用许瓦兹不等式

$$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_E|f(x)|^{\lambda p}|f(x)|^{(1-\lambda)p}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\left(\int_E|f(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{\lambda p/r}\cdot\left(\int_E|f(x)|^s\mathrm{d}x\right)^{(1-\lambda)p/s}.$$

当 $r<s=\infty$ 时，因为 $p=r/\lambda$，故有

$$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\|f^{p-r}\|_\infty\int_E|f(x)|^r\mathrm{d}x$$
$$=\|f\|_r^{p\lambda}\cdot\|f\|_\infty^{p(1-\lambda)}.$$

即，当 $r<p<s\leqslant\infty$ 时，有 $\|f\|_p\leqslant\|f\|_f^{\lambda}\cdot\|f\|_\infty^{(1-\lambda)}$.

例 4 在[0,1]上作一函数 $f(x)$，使 $f\in L(E)$，而 $f\overline{\in}L^2$.

解 设函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1/(n+1),\\ 1, & 1/n\leqslant x\leqslant 1,\\ \sqrt{n}, & 1/(n+1)<x<1/n,\end{cases}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

则有$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n(n+1)}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}.$$

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$ 收敛，从而 $f(x)$ 在[0,1]上可积. 但是

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\infty$$

是发散的. 故 $f\overline{\in}L^2$.

例 5　证明:在 L^2 中,范数有如下性质.

(1) $\|f\| \geqslant 0$, $\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0$, a.e.;

(2) $\|\alpha \cdot f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$;

(3) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

证　(1) 因为 $\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant 0$,所以 $\|f(x)\| \geqslant 0$.而依勒贝格积分的性质,等式

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x = 0$$

成立的充要条件是 $f^2(x) = 0$,即 $f(x) = 0$.

(2) $$\|\alpha f(x)\| = \left(\int_a^b \alpha^2 f^2(x) \mathrm{d}x\right)^{1/2} = |\alpha| \left(\int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x\right)^{1/2} = |\alpha| \cdot \|f\|.$$

(3) 依柯西不等式,有

$$\begin{aligned}\|f(x) + g(x)\| &= \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &= \|f\| + \|g\|.\end{aligned}$$

例 6　设 $f \in L^2$,证明

$$\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant \sqrt{b-a} \left(\int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

证　利用许瓦兹不等式

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x &= \int_a^b 1 \cdot |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant \|1\|_2 \cdot \|f\|_2 \\ &= \left(\int_a^b 1^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{b-a} \cdot \left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

例 7　设 $f(x), g(x)$ 是 E 上的非负可测函数,$1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $1 \leqslant r < \infty$, $1/r = 1/p + 1/q - 1$.证明:

$$\left|\int_E f(x) g(x) \mathrm{d}x\right| \leqslant \|f\|_p^{1-p/r} \|g\|_q^{1-q/r} \left(\int_E |f(x)|^p |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/r}.$$

证 利用 $|f(x)g(x)| = f(x)g(x)$ 和许瓦兹不等式.

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_E [f(x)]^{1-p/r}[g(x)]^{1-q/r}[f^p(x)g^q(x)]^{1/r}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{(1-p/r)/p}\left(\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{(1-q/r)/q}$$

$$\cdot \left(\int_E |f(x)|^p |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/r}$$

$$= \|f\|_p^{1-p/r} \cdot \|g\|_q^{1-q/r}\left(\int_E |f(x)|^p |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/r}.$$

例 8 设 $f \in L^p(\mathbf{R}^n), g \in L^q(\mathbf{R}^n), 1 \leqslant p < \infty, 1 \leqslant q < \infty$, $1/p + 1/q - 1 > 0$,令 $h(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$. 证明: $\|h\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q, 1/r = 1/p + 1/q - 1$.

证 利用上题结论,得

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(t)g(x-t)|\mathrm{d}t\right)^r$$

$$\leqslant \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_p^{r-q} \cdot \int_{\mathbf{R}^n} |f(t)|^p |g(x-t)|^q \mathrm{d}t,$$

$$\|h\|_r = \left(\int_{\mathbf{R}^n} |h(x)|^r \mathrm{d}x\right)^{1/r}$$

$$\leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^n} \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \cdot \int_{\mathbf{R}^n} |f(t)|^p |g(x-t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/r}$$

$$= \|f\|_p^{1-p/r} \cdot \|g\|_q^{1-q/r}$$

$$\cdot \left[\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(t)|^p |g(x-t)|^q \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right]^{1/r}$$

$$\leqslant \|f\|_p^{1-p/r} \cdot \|g\|_q^{1-q/r} \cdot \|f\|^{p/r} \cdot \|g\|^{q/r}$$

$$= \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

例 9 设 $f \in L^p(E)$,e 为 E 的可测子集. 证明:

$$\left\{\int_E |f|^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int_e |f|^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p} + \left\{\int_{E\setminus e} |f|^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$

证 作函数

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & x\in e,\\ 0, & x\in E\setminus e;\end{cases}\quad f_2(x)=\begin{cases}0, & x\in e,\\ f(x), & x\in E\setminus e.\end{cases}$$

于是，依闵可夫斯基不等式，有

$$\begin{aligned}\left\{\int_E|f|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}&=\left\{\int_E|f_1+f_2|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}.\\ &\leqslant\left\{\int_E|f_1|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}+\left\{\int_E|f_2|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\\ &=\left\{\int_e|f|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}+\left\{\int_{E\setminus e}|f|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}.\end{aligned}$$

例 10 设 p,q,r 为满足 $1/p+1/q+1/r=1$ 的三个正数，证明：对任何可测函数 f,g,h，有

$$\int_E|fgh|\mathrm{d}x\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_q\cdot\|h\|_r.$$

证 若 $\|f\|_p,\|g\|_q,\|h\|_r$ 中至少有一个为 ∞，则不等式显然成立.

若 $f\in L^p,g\in L^q,h\in L^r$，则因为 $g^{p/(p-1)}\in L^{(p-1)q/p},h^{p/(p-1)}\in L^{(p-1)r/p}$，所以

$$1\Big/\frac{(p-1)q}{p}+1\Big/\frac{(p-1)r}{p}=1,$$

依赫尔德不等式，得

$$g^{p/(p-1)}h^{p/(p-1)}\in L^1,\text{即 } gh\in L^{p/(p-1)}.$$

且有 $\int_E|gh|^{p/(p-1)}\mathrm{d}x\leqslant\|g^{p/(p-1)}\|_{(p-1)q/p}\cdot\|h^{p/(p-1)}\|_{(p-1)r/p}$

$$=\left\{\int_E|g|^q\mathrm{d}x\right\}^{p/[(p-1)q]}\cdot\left\{\int_E|h|^r\mathrm{d}x\right\}^{p/[(p-1)r]}.$$

又由 $gh\in L^{p/(p-1)},f\in L^p$ 及 $\frac{1}{p}+1\Big/\frac{p}{p-1}=1$，再次依赫尔德不等式，得 $fgh\in L^1$，且

$$\begin{aligned}\int_E|fgh|\mathrm{d}x&\leqslant\|f\|_p\|gh\|_{p/(p-1)}\\ &\leqslant\|f\|_p\left\{\int_E|g|^q\mathrm{d}x\right\}^{1/q}\cdot\left\{\int_E|h|^r\mathrm{d}x\right\}^{1/r}\\ &=\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r.\end{aligned}$$

例 11 设 $f \in L^p(-\infty,\infty)$，$g \in L^q(-\infty,\infty)$，$1/p + 1/q = 1$，$p \geqslant 1$. 证明：$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)g(x)\mathrm{d}x$ 是 t 的连续函数.

证 先证 $\lim\limits_{h\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p} = 0$.

因为 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N > 0$，使得当 $|h| < 1$ 时，有

$$\left\{\int_{-\infty}^{-N} |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p} < \varepsilon/3,$$

$$\left\{\int_{N}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p} < \varepsilon/3,$$

由例 12 知，$\exists\ 0 < h_0 < 1$，使得当 $|h| < h_0$ 时，有

$$\left\{\int_{-N}^{N} |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p} < \varepsilon/3,$$

故
$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p} < \varepsilon.$$

从而证得 $\lim\limits_{h\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p} = 0$.

再证 $F(t)$ 是 t 的连续函数. 因为，对任意的 $t \in (-\infty,\infty)$，依赫尔德不等式，有

$$\begin{aligned}
&|F(t+\Delta t) - F(t)| \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t+\Delta t) - f(x+t)||g(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t+\Delta t) - f(x+t)|^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p} \cdot \|g\|_q \\
&= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+\Delta t) - f(x)|^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p} \|g\|_q.
\end{aligned}$$

则利用前面证得的结果，知

$$\lim_{\Delta t\to 0} |F(t+\Delta t) - F(t)| = 0,$$

即 $F(t)$ 是 t 的连续函数.

例 12 设 $f \in L^p([a,b])$，$p > 0$，证明：

$$\lim_{h\to 0}\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p} = 0 \quad (0 < 2\delta \leqslant b-a).$$

证 (1) 首先证明：$\forall\ \varepsilon > 0$，存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$，

使得$\left\{\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}<\varepsilon$.

若令$E=[a,b]$,$E_n=\{x:|f|>n\}$,则由积分的连续性知,存在$\delta_1>0$,使得当$e\subset E$,$m(e)<\delta_1$时,有

$$\left\{\int_E|f|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}<\varepsilon/4.$$

又由$\lim\limits_{n\to\infty}m(E_n)=0$,知必存在$N$,使得$m(E_N)<\delta_1$. 于是,有

$$N\cdot m(E_N)<\left\{\int_E|f|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}<\varepsilon/4.$$

由鲁金定理知,存在闭集$F\subset E\backslash E_N$,使得

$$[m((E\backslash E_N)\backslash F)]^{1/p}<\varepsilon/4N.$$

因为$f(x)$在F上是连续的,所以在$[a,b]$上作连续函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in F,\\ \text{函数保持线性}, & x\in E\backslash F.\end{cases}$$

则$\varphi(x)$即为所求. 因为,在$|\varphi(x)|\leqslant N$时,有

$$\begin{aligned}&\left\{\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\\&=\left\{\int_F|f-\varphi|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}+\left\{\int_{E_N}|f-\varphi|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\\&\quad+\left\{\int_{(E\backslash E_N)\backslash F}|f-\varphi|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\\&\leqslant\left\{\int_{E_N}|f|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}+\left\{\int_{E_N}|\varphi|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\\&\quad+2N\cdot\{m((E\backslash E_N)\backslash F)\}^{1/p}<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

(2) 由(1),$\forall\ \varepsilon>0$,存在$[a,b]$上的连续函数$\varphi(x)$,使得

$$\left\{\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}<\varepsilon/3.$$

又由$f(x)$在$[a,b]$上一致连续知,存在$0<\delta_2<\delta_1$,使得对于任何$x',x''\in[a,b]$,当$|x'-x''|<\delta_2$时,有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{1}{b-a}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.$$

因而，当 $|h| < |\delta_2|$ 时，有

$$\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$
$$\leqslant \left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h)-\varphi(x+h)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$
$$+\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$
$$+\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|\varphi(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{h\to 0}\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}=0.$

例 13 设 $p>1$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 能使闵可夫斯基不等式中之等号成立，则必有 $g(x)=kf(x)(k\geqslant 0)$.

证 (1) 先证明：若 $f\in L^p, g\in L^q, 1/p+1/q=1$，则使得赫尔德不等式中等号成立的充要条件是存在常数 $\lambda\geqslant 0$，使得对于 $x\in E$，

$$|g(x)|=\lambda|f(x)|^{p/q},\ \text{a.e. 或 } f(x)=0,\ \text{a.e.}.$$

因为，当 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$, a.e. 至少一个成立时，赫尔德不等式中等号自然成立.

以下用反证法. 设 $\|f\|_p>0$, $\|g\|_q>0$，证明在赫尔德不等式等号成立时，必有 $\lambda>0$ 使得 $|g(x)|=\lambda|f(x)|^{p/q}$, a.e..

因为证明赫尔德不等式时，用到不等式 $ab\leqslant a^p/p+b^q/q$ $(a>0, b>0)$. 当取等号时，必有 $a^p=b^q$. 证明过程中还取了

$$\varphi(x)=f(x)/\|f\|_p,\quad \psi(x)=g(x)/\|g\|_q.$$
$$\left(\int_E|\varphi|^p\mathrm{d}x=1,\quad \int_E|\psi|^q\mathrm{d}x=1\right)$$

从而，使得不等式 $|\varphi\cdot\psi|\leqslant|\varphi|^p/p+|\psi|^q/q$ 中等号成立必须且只需 $|\varphi|^p=|\psi|^q$. 从而要使不等式

$$\int_E |\varphi \cdot \psi| \mathrm{d}x \leqslant \int_E (|\varphi|^p/p + |\psi|^q/q) \mathrm{d}x$$
$$= 1/p + 1/q = 1,$$

即不等式$\int_E |fg| \mathrm{d}x \leqslant \| f \|_p \cdot \| g \|_q$中等号成立，必须且只需在$E$上，有

$$|\varphi(x)|^p = |\psi(x)|^q, \text{ a.e.}$$

或 $$|g(x)|^q = \| g \|_q^q / \| f \|_p^p \cdot |f(x)|^p, \text{ a.e.}$$

即 $$|g(x)|^q = \| g \|_q^q / \| f \|_p^p \cdot |f(x)|^p, \text{ a.e.},$$

亦即 $$|g(x)| = \| g \|_q / \| f \|_p^{p/q} \cdot |f(x)|^{p/q}, \text{ a.e.}.$$

取$\lambda = \| g \|_q / \| f \|_p^{p/q} (\lambda > 0)$，则有$|g(x)| = \lambda |f(x)|^{p/q}$, a.e..

当 $g(x) = 0$, a.e. 时，可取 $\lambda = 0$. 这时，$|g(x)| = \lambda |f(x)|^{p/q}$, a.e.仍成立，还有可能$f(x) = 0$, a.e..

反之，若$\| g \| = \lambda |f|^{p/q} (\lambda \geqslant 0)$, a.e.成立，或$f(x) = 0$, a.e.时，赫尔德不等式中等号成立.

当$f = 0$, a.e.或$g = 0$, a.e.(相当于$\lambda = 0$)时，赫尔德不等式中等号自然成立.

设$\lambda > 0$, $|g| = \lambda |f|^{p/q}$, a.e.成立.则

$$|f \cdot g| = \lambda |f|^{1+p/q} = \lambda |f|^p, \text{ a.e.},$$

从而 $$\int_E |f \cdot g| \mathrm{d}x = \lambda \int_E |f|^p \mathrm{d}x,$$

$$\left(\int_E |f|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q \mathrm{d}x \right)^{1/q}$$
$$= \left(\int_E |f|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\lambda^q \int_E |f|^p \mathrm{d}x \right)^{1/q}$$
$$= \lambda \left(\int_E |f|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p+1/q} = \lambda \int_E |f|^p \mathrm{d}x.$$

综上知，赫尔德不等式中等号成立.

(2) 证明：使闵可夫斯基不等式(其中$f, g \in L^p$, $p > 1$)中等号成立的充要条件是，存在常数$\lambda \geqslant 0$，使得$g = \lambda f$, a.e.或$f = 0$, a.e..

因为,在证明闵可夫斯基不等式过程中用到了下面三不等式:

$$|f+g|^p = |f+g| \cdot |f+g|^{p/q}$$
$$\leqslant |f| \cdot |f+g|^{p/q} + |g| \cdot |f+g|^{p/q}, \qquad ①$$

$$\int_E |f| \cdot |f+g|^{p/q} \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E |f|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_E |f+g|^p \mathrm{d}x\right)^{1/q}, \qquad ②$$

$$\int_E |g| \cdot |f+g|^{p/q} \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E |g|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_E |f+g|^p \mathrm{d}x\right)^{1/q}. \qquad ③$$

其中 ① 式等号成立必须且只需 $|f+g| = |f| + |g|$ 成立,即 f 与 g 同号. ② 式与 ③ 式同时成立的充要条件是:

有 $\lambda_1 \geqslant 0$,使得 $|f+g|^{p/q} = \lambda_1 |f|^{p/q}$, a.e. 或 $f=0$, a.e..

有 $\lambda_2 \geqslant 0$, 使得 $|f+g|^{p/q} = \lambda_2 |g|^{p/q}$, a.e. 或 $g=0$, a.e..

若 $f=0$ 及 $g=0$ 或至少有一个成立,则闵可夫斯基不等式自然取等号.

设 $f>0, g>0$,则 $f+g>0, \lambda_1>0, \lambda_2>0$.

从而 $f+g=\lambda_1' f, f+g=\lambda_2' g, (\lambda_1'>0, \lambda_2'>0)$. 有

$$\lambda_1' f = \lambda_2' g, g = \lambda_1'/\lambda_2' \cdot f = \lambda f, (\lambda > 0)$$

综上所知,闵可夫斯基不等式取等号的充要条件是:$f=0$, a.e. 或存在常数 $\lambda \geqslant 0$,使 $g=\lambda f$, a.e. 成立.

例 14 证明:当 $1 \leqslant r < p$ 时,$L^p \subset L^r$.

证 (1) $m(E) < \infty, f(x) \in L^p$. 因为

$$\int_E |f|^p \mathrm{d}x = \int_E (|f|^r)^{p/r} \mathrm{d}x < \infty,$$

知 $|f|^r \in L^{p/r} (p/r > 1)$,$p/r$ 的共轭数为 $p/(p-r) > 1$. 显然 $1 \in L^{p/(p-r)}$,从而

$$\int_E |f|^r \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E (|f|^r)^{p/r} \mathrm{d}x\right)^{r/p} \cdot \left(\int_E 1^{p/(p-r)} \mathrm{d}x\right)^{(p-r)/p},$$

$$\left(\int_E |f|^r \mathrm{d}x\right)^{1/r} \leqslant \left(\int_E |f|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \cdot \left(\int_E 1 \mathrm{d}x\right)^{(p-r)/(pr)}.$$

即 $\|f\|_r \leqslant \|f\|_p \cdot (m(E))^{(1/r-1/p)} \quad (p > r \geqslant 1)$.

由 $m(E) < \infty$ 知,$f \in L^p$.

(2) $m(E)=\infty, p>r>0$,则 L^p 与 L^E 互不包含. 例如,设 $E=[1,\infty), f(x)=x^{-1/2}$,则 $f\in L^4$,但 $f\overline{\in} L^2$.

当 $1\leqslant r<p$ 时,由于

$$\| f_n - f \|_r \leqslant \| f_n - f \|_p (m(E))^{(1/r-1/p)},$$

所以,可由 $\| f_n - f \|_p \to 0$ 推出 $\| f_n - f \|_r \to 0$.

例 15 设 $m(E)<\infty$ 且 $0<p_1<p_2\leqslant\infty$,证明:$L^{p_2}(E)\subset L^{p_1}(E)$;且

$$\| f \|_{p_1} \leqslant [m(E)]^{1/p_1-1/p_2} \| f \|_{p_2}.$$

证 可设 $P_2<\infty$,令 $r=p_2/p_1$,则 $r>1$. 以 r' 记 r 的共轭指标,则对 $f\in L^{p_2}(E)$,依赫尔德不等式,有

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|^{p_1}\mathrm{d}x &= \int_E [|f(x)|^{p_1}\cdot 1]\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_E |f(x)|^{p_1\cdot r}\mathrm{d}x\right)^{1/r}\cdot\left(\int_E 1^{r'}\mathrm{d}x\right)^{1/r'} \\ &= (m(E))^{1/r'}\left(\int_E |f(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{1/r}.\end{aligned}$$

从而命题成立,有

$$\left(\int_E |f(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\right)^{1/p_1} \leqslant (m(E))^{1/p_1-1/p_2}\left(\int_E |f(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{1/p_2}.$$

例 16 设 $0<r<p<s<\infty, f\in L^p(E)$,证明:$\forall\, t>0$,$\exists$ 分解 $f(x)=g(x)+h(x)$,使得

$$\| g \|_r^r \leqslant t^{r-p} \| f \|_p^p, \quad \| h \|_s^s \leqslant t^{s-p} \| f \|_p^p.$$

证 对 $t>0$,作函数

$$g(x)=\begin{cases}0, & |f(x)|\leqslant t,\\ f(x), & |f(x)|>t.\end{cases}$$

在 $r-p<0$ 时有

$$\begin{aligned}\| g \|_r^r &= \int_E |g(x)|^r\mathrm{d}x = \int_E |g(x)|^{r-p}|g(x)|^p\mathrm{d}x \\ &\leqslant t^{r-p}\int_E |g(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant t^{r-p}\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

即为所证. 类似可证第二个不等式.

第二节 L^p 空间的性质

主要内容

一、$L^p(E)$ 是完备的距离空间

1. 对于 $f,g\in L^p(E)$,定义

$$d(f,g)=\|f-g\|_p,\ 1\leqslant p<\infty.$$

则 $(L^p(E),d)$ 是一个距离空间. 且有

(1) $d(f,g)\geqslant 0$;$d(f,g)=0$,当且仅当 $f=g$.

(2) $d(f,g)=d(g,f)$;

(3) $d(f,g)\leqslant d(f,h)+d(h,g)$,即

$$\|f-g\|_p=\|f-h+h-g\|\leqslant\|f-h\|_p+\|h-g\|_p.$$

2. 设 $f_k\in L^p(E)$ $(k=1,2,\cdots)$. 若存在 $f\in L^p(E)$,使得

$$\lim_{k\to\infty}d(f_k,f)=\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0.$$

则称 $\{f_k\}$ 依 L^p 的意义收敛于 f,$\{f_k\}$ 为 $L^p(E)$ 中的收敛列,f 为 $\{f_k\}$ 的极限. 且有

(1) 极限的惟一性. 若 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_k-g\|_p=0$,则 $f=g$;

(2) 若 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$,则 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k\|_p=\|f\|_p$.

3. 设 $\{f_k\}\subset L^p(E)$. 若 $\lim\limits_{k,j\to\infty}\|f_k-f_j\|_p=0$,则称 $\{f_k\}$ 是 $L^p(E)$ 中的基本列(或 Cauchy 列).

4. $L^p(E)$ 是完备的距离空间. 即若距离空间中任一基本列必收敛,则称距离空间是完备的.

二、L^p 空间的可分性

1. 设 Γ 是 $L^p(E)$ 中的子集,若对任意的 $f\in L^p(E)$ 及 $\varepsilon>0$,存在 $g\in\Gamma$,使得 $\|f-g\|_p<\varepsilon$,则称 Γ 在 $L^p(E)$ 中稠密;若 $L^p(E)$ 中存在可数稠密子集,则称 $L^p(E)$ 是可分的.

2. 设 $f \in L^p(E)\ (1 \leqslant p < \infty)$，则 $\forall\ \varepsilon \to 0$，有

(1) 存在 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $g(x)$，使得

$$\int_E |f(x) - g(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon;$$

(2) 存在 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的阶跃函数 φ：

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{I_i}(x).$$

其中每个 I_i 都是二进方体，使得 $\int_E |f(x) - \varphi(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon$.

3. $L^p(E)\ (1 \leqslant p < \infty)$ 是可分空间.

若 $1 \leqslant p < \infty, 1 \leqslant r < \infty$，则 $L^p(E) \cap L^r(E)$ 在 $L^p(E)$ 中稠密.

4. 若 $f \in L^p(\mathbf{R}^n)\ (1 \leqslant p < \infty)$，则有

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbf{R}^n} |f(x+t) - f(x)|^p \mathrm{d}x = 0.$$

疑 难 解 析

1. 怎样理解 $\lim\limits_{k \to \infty} f_k = f$？

答 对 $f \in L^p, \delta > 0$，记 $N(f,\delta) = \{g : d(g,f) < \delta, g \in L^p\}$ 为 f 的 δ 邻域. 设 $f_k \in L^p$，若对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在相应的 $N > 0$，使得当 $k \geqslant N$ 时，恒有 $d(f_k, f) = \| f_k - f \| < \varepsilon$ 成立，则称 $\{f_k\}$ 平均收敛于 f，而称 f 为 f_k 的极限，即 $\lim\limits_{k \to \infty} f_k = f$.

(1) 如果用邻域来叙述平均收敛，表达为：对 f 的任意一个邻域 $N(f,\delta)$，存在相应的 $N > 0$，则当 $k > N$ 时，恒有 $f_k \in N(f,\delta)$.

(2) 分清 $f_k(x) \to f(x)$ 与 $f_k \to f$ 的本质区别. $f_k(x) \to f(x)$ 表示对固定的 x，数列 $\{f_k(x)\}$ 依通常意义收敛于 $f(x)$. 而 $f_k \to f$ 表示 L^p 中的元素列 $\{f_k\}$ 平均收敛于 f，即 $f_k \to f$ 指的

$$\lim_{k \to \infty} \| f_k \|_p = \| f \|_p,$$

也称为范数的连续性.

平均收敛的概念在微分方程、概率论以及逼近论等许多方面有着广泛的应用.

2. 稠密概念可以从哪些方面去理解?

答 稠密概念有以下几种等价的说法:

(1) $\forall\ x \in A$(距离空间的子集)及$\varepsilon > 0$,$\exists\ y \in B$,使得$d(x, y) < \varepsilon$.

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$,以 B(也是距离空间子集)中每个点作中心,以ε为半径的所有邻域的并包含 A,即 $A \subset \bigcup N(y,\varepsilon)$,$y \in B$.

(3) 对任意 $x \in A$,B 中有点列$\{x_n\}$收敛于 x.

应注意的是,稠密定义中只要求 $B \supset A$,不要求 $A \supset B$.

3. 从完备性定义中可以认识到什么?

答 (1) 任何距离空间中的收敛列必是基本列,但逆不成立. (2) 完备距离空间中的任何一个闭子集在看做是一个新空间时也是完备的.

方法、技巧与典型例题分析

L^p 空间的平均收敛与数学分析中的逐点收敛不同. 也与后面讲到的弱收敛不同,要注意掌握收敛的定义与实质所在. 完备性与可分性是 L^p 空间的基本性质,其证明是典型的,必须学习并掌握.

一、距离空间问题

例 1 设E是一距离空间,距离为$d(\ ,\ )$. 证明:对E中任意三点 x,y,z,有

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leqslant d(x,y).$$

证 由三角不等式,得

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z),$$

$$d(y,z) \leqslant d(y,x) + d(x,z) = d(x,y) + d(x,z),$$

故 $d(x,z) - d(y,z) \leqslant d(x,y)$, $d(y,z) - d(x,z) \leqslant d(x,y)$.

即得 $$|d(x,z) - d(y,z)| \leqslant d(x,y).$$

例 2 设 E 为一非空集合，在 E 中定义

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & 当\ x\neq y,\\ 0, & 当\ x=y.\end{cases}$$

证明：E 在上述定义下是一距离空间.

证 距离空间的头两条性质显然满足.

对 $x=y$，则 $d(x,y)=0$，三角不等式成立. 若 $x\neq y$，则 $d(x,y)=1$，这时，对任意 z 都有 $d(x,z)+d(x,y)\geqslant 1$，从而

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y).$$

例 3 证明：

(1) 距离空间中任一闭集必可表为可列个开集之交；

(2) 距离空间中任一开集必可表为可列个闭集之并.

证 (1) 设 E 为距离空间中的任一闭集. 令

$$G_n=\{x:d(x,E)<1/n\},$$

则容易验证每个 G_n 为开集，且 $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$.

(2) 设 G 是距离空间中的任一开集. 令 $F=G^{C}$，则 F 是闭集. 由(1)知，存在 $\{G_n\}$，使得 $F=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}G_m$. 从而

$$G=F^{C}=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n^{C}=\bigcup_{m=1}^{\infty}F_n\quad(F_n=G_n^{C}\ 是闭集).$$

例 4 若 $x_n\to x_0, y_n\to y_0$. 证明：$d(x_n,y_n)\to d(x_0,y_0)$.

证 由三角不等式，有

$$\begin{aligned}d(x_n,y_n)&\leqslant d(x_n,x_0)+d(x_0,y_n)\\&\leqslant d(x_n,x_0)+d(x_0,y_0)+d(y_0,y_n).\end{aligned}$$

因而 $d(x_n,y_n)-d(x_0,y_0)\leqslant d(x_n,x_0)+d(y_n,y_0)$，

类似 $d(x_0,y_0)-d(x_n,y_n)\leqslant d(x_0,x_n)+d(y_0,y_n)$，

从而得 $|d(x_n,y_n)-d(x_0,y_0)|\leqslant d(x_n,x_0)+d(y_n,y_0)$.

令 $n\to\infty$，即得所证结论.

例 5 设 $\mathbf{R}^1$ 是实数全体，在 $\mathbf{R}^1$ 上规定距离

$$d_1(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x+y|},\quad x,y\in\mathbf{R}^1.$$

证明：$\mathbf{R}^1$ 按 $d(x,y)$ 是一个距离空间.

证 $d_1(x,y) \geqslant 0, d_1(x,y) = d_1(y,x)$ 是显然的.

现在证明，对任意复数 a,b，成立不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

考察在$[0,\infty)$上的函数$\varphi(x) = x/(1+x)$. 由于$\varphi(x) = 1 + 1/(1+x)$，所以 $\varphi(x)$ 是单调增加函数. 由 $|a+b| \leqslant |a| + |b|$，可得

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

从而，有

$$\begin{aligned}d_1(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} &\leqslant \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|} \\ &= d(x,z) + d(z,y).\end{aligned}$$

$\mathbf{R}^1$ 按 $d(x,y) = |x-y|$ 是一个距离空间，按 $d_1(x,y)$ 也是一个距离空间，但它们的极限概念却是一致的. 又如，$\mathbf{R}^n$ 上按距离

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2},$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|, d_2(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$$

是三个不同的距离空间. 但在这三个距离空间中，点列按距离收敛就是按每个坐标收敛. 可知点列的收敛与否，及收敛点列的极限，在这三个距离空间中是完全一致的.

设 E 是勒贝格可测集，$m(E) < \infty$. 又设 S 是 E 上实值(或复值)可测函数全体，当 f,g 在 E 上几乎处处相等时，把 f 和 g 看成 S 中的同一点，对于 $f,g \in S$，规定

$$d(f,g)=\int_E \frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\mathrm{d}t,$$

由于$\frac{|f-g|}{1+|f-g|}\leqslant 1, m(E)<\infty$,所以上式右边的积分是存在的.类似于例 5,可以证明 $d(f,g)$ 确为 S 上的距离.

例 6 设 E 为距离空间,$A\subset E$.证明:E 的一切内点组成的集合为开集.

证 设 $B=\{x:x$ 为 A 的内点$\}$,任取 $x\in B$,因为 x 是 A 的内点,故必存在 $\delta>0$,使开球 $S(x,\delta)\subset A$,现证明 $S(x,\delta)\subset B$.

对任一 $y\in S(x,\delta)$,令 $\delta_1=\delta-d(x,y)>0$,则 $S(y,\delta_1)\subset S(x,\delta)\subset A$,所以 y 是 A 的内点,即 $S(x,\delta)\subset B$,从而 B 为开集.

例 7 设 E 为距离空间,$A\subset E$,令 $f(x)=\inf\limits_{y\in A}d(x,y), x\in E$.证明:$f(x)$ 是连续函数.

证 任取 $x,x_0\in E$,则由三角不等式

$$d(x,y)\leqslant d(x,x_0)+d(x_0,y)$$

可得 $$\inf_{y\in A}d(x,y)\leqslant d(x,x_0)+\inf_{y\in A}d(x_0,y), \qquad ①$$

同理 $$\inf_{y\in A}d(x_0,y)\leqslant d(x,x_0)+\inf_{y\in A}d(x,y). \qquad ②$$

由 ①,② 立即可得

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant d(x,x_0),$$

故 $f(x)$ 为连续函数.

例 8 设 E 为距离空间,F_1,F_2 为 E 中的两个互不相交的闭集,则存在定义在 E 上的连续函数 $f(x)$,使当 $x\in F_1$ 时,$f(x)=0$,当 $x\in F_2$ 时,$f(x)=1$.

证 记 $d(x,A)=\inf\limits_{y\in A}d(x,y)$,令

$$f(x)=\frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)},$$

则依例 7,$f(x)$ 是 E 上的连续函数,且

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in F_1,\\ 1, & x\in F_2.\end{cases}$$

例 9 设 E 为距离空间，F_1 与 F_2 为 E 中不相交的闭集. 证明：存在开集 G_1,G_2，使得 $G_1 \cap G_2 = \varnothing, G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$.

证 利用例 8，令 $f(x) = \dfrac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}$，则 $f(x)$ 是连续函数，$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$，且

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in F_1, \\ 1, & x \in F_2, \end{cases}$$

再令 $G_1 = \{x: f(x) < 1/2\}, G_2 = \{x: f(x) > 1/2\}$，则知 G_1,G_2 均为开集，且 $G_1 \cap G_2 = \varnothing, G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$.

例 10 设有 $(-\infty,\infty)$ 上定义的连续实值函数 f，对任意 $x, y \in (-\infty,\infty)$，记 $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$. 证明：d 是 $(-\infty, \infty)$ 上距离的充要条件为 f 是严格单调函数.

证 **充分性** 设 f 是严格单调函数，则直接验证即知，$d(x, y)$ 是一个距离.

必要性 设 $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的距离. 由于 $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$，可知 $x \neq y$ 时，$f(x) \neq f(y)$. 今证 $x < y < z$ 时，有 $f(x) > f(y) > f(z)$ 或 $f(x) < f(y) < f(z)$. 用反证法. 设 f 不是严格单调函数，则必 $f(x) > f(y), f(z) > f(y)$，或者 $f(x) < f(y), f(z) < f(y)$. 考虑第一种情形（其他情形类似可证），设 $f(z) > f(x)$，在 $[y,z]$ 上考察连续函数 f. 因为 $f(z) > f(x) > f(y)$，则由中值定理可知，必存在 $t \in [y,z]$，使 $f(t) = f(x)$. 但 $x < y < t$，故 $x \neq t$，得出矛盾.

例 11 设 E 是勒贝格可测集，$0 < p \leqslant 1$. 对于 $f, g \in L^p(E)$，记 $d(f,g) = \int_E |f(t) - g(t)|^p \mathrm{d}t$. 证明：$L^p(E)$ 按上述 d 是一个距离空间.

证 当 $0 < p \leqslant 1$ 时，对任意 x，如果 $0 \leqslant x \leqslant 1$，则有 $(1 + x)^p \leqslant 1 + x \leqslant 1 + x^p$. 对任何 a, b，设 $|a| \leqslant |b|$ 且 $b \neq 0$，取 $x = |a|/|b|$，则有 $(1 + |a|/|b|)^p \leqslant (1 + |a|^p/|b|^p)$，从而 $|a + b|^p \leqslant (|a| + |b|)^p \leqslant |a|^p + |b|^p$，当 $a = b = 0$ 时，这个不等式也

成立.

对 $f,g \in L^p(E)$,显然有$\int_E |f(t)-g(t)|^p \mathrm{d}t \geqslant 0$,即 $d(f,g) \geqslant 0$. 而 $d(f,g)=0 \Longleftrightarrow f=g$, a.e. ,$d(f,g)=d(g,f)$ 也是显然的. 对于 $f,g,h \in L^p(E)$,利用已证得不等式,有

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \int_E |f(t)-g(t)|^2 \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_E [|f(t)-h(t)|^p + |h(t)-g(t)|^p] \mathrm{d}t \\ &= d(f,h)+d(h,g). \end{aligned}$$

所以,当把 $L^p(E)$ 中几乎处处相等的函数视做同一元素时,$L^p(E)$ 按所定义的 d 是一个距离空间.

二、可分性问题

稠密性概念可以这样来讨论:当需要考察点集 N 的某些性质时,我们可以先对其中的稠密子集 M 加以考察,然后利用极限过程推广到 N 上去.

例 12 证明:多项式全体在 $C^k[a,b]$ 中稠密,其中 $C^k[a,b]$ 表示$[a,b]$上 k 次连续可微函数的全体,距离定义为

$$d(x,y)=\sum_{j=0}^{b} \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x^{(j)}(t)-y^{(j)}(t)|.$$

证 任取 $x(t) \in C^k[a,b]$,$\varepsilon > 0$,因为 $x^{(k)}(t) \to C[a,b]$,则存在多项式 $P(t)$,使得

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b} |x^{(k)}(t)-P(t)| < \frac{\varepsilon}{(k+1)A^k}.$$

其中 $A=\max\{1,b-a\}$,令

$$P_1(t)=\int_a^t P(u)\mathrm{d}u + x^{(k-1)}(a),\cdots$$

$$P_j(t)=\int_a^t P_{j-1}(u)\mathrm{d}u + x^{(k-j)}(a),\ j=1,2,\cdots,k;\ P_0(t)=P(t).$$

显然 $x^{(j-1)}(t)=\int_a^t x^{(j)}(u)\mathrm{d}u + x^{(j-1)}(a),\ j=1,2,\cdots,k.$

$$P_k^{(j)}(t)=P_{k-j}(t),\ j=1,2,\cdots,k.$$

则 $P_k(t)$ 是一个多项式，且满足

$$d(P_k'(t),x(t))<\varepsilon.$$

从而多项式全体在 $C^k[a,b]$ 中稠密.

例 13 设 $1\leqslant p<\infty$，$B[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上有界可测函数全体. 证明：$B[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 上稠密.

证 对 $f\in L^p[a,b]$，作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & |f(x)|<n,\\ 0, & |f(x)|>n.\end{cases}$$

则 f_n 是有界可测函数，且

$$\int_a^b|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_{|f|>n}|f(x)|^p\mathrm{d}x,$$

因为 $|f|^p\in L^p[a,b]$，由积分的全连续性，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当 $e\subset[a,b]$，$m(e)<\delta$ 时，有

$$\int_e|f(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon^p.$$

因为 $n^p\cdot m(|f|>n)\leqslant\int_{|f|>n}|f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x$，

所以，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，$m((|f|>n))<\delta$，

从而 $$\|f_n-f\|_p=\left(\int_{|f|>n}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}<\varepsilon,$$

故 $f_n\to f$. 由等价性知，$B[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密.

例 14 设 $1\leqslant p<\infty$，视 $C[a,b]$ 为 $L^p[a,b]$ 的子空间. 证明：$C[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密.

证 由例 13 知，$B[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密，则由定理：设 E 是距离空间，若 A,B,C 是 E 的点集，C 在 B 中稠密，B 在 A 中稠密，则 C 在 A 中稠密. 知只需证明，按 $L^p[a,b]$ 的距离，$C[a,b]$ 在 $B[a,b]$ 中稠密，就有 $C[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密.

任取 $f\in B[a,b]$，设 $|f(x)|\leqslant k$，$x\in[a,b]$. 取 $\varepsilon>0$，则依鲁金定理，对于正数 $\delta=(\varepsilon/2k)^p$，存在 $g\in C[a,b]$，使得 $m((f\neq g))<\delta$. 不妨设 $|g(x)|\leqslant k$，否则，将 g 换成连续函数

$\max\{\min(g(x),k), -k\}$ 就可以了.记 $E=(f\neq g)$，于是

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|^p \mathrm{d}x = \int_E |f(x)-g(x)|^p \mathrm{d}x$$
$$\leqslant (2k)^p m(E) < \varepsilon^p.$$

即 $\|f-g\|_p<\varepsilon$，依定义知，$C[a,b]$ 在 $B[a,b]$ 中按 $L^p[a,b]$ 的距离是稠密的.

例 15 证明:L^p 是一个完备的、可分的距离空间，其中

$$d(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^p\right)^{1/p},\ p\geqslant 1.$$

证 $d(x,y)$ 是一个距离是显然的.

(1) 先证完备性.设 $\{x_n\}\subset L^p$ 是基本列，其中 $x_n=(\xi_i^{(n)})$，则 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,N>0$，当 $n,m\geqslant N$ 时，有

$$d(x_n,y_m)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|^p\right)^{1/p}<\varepsilon. \qquad ①$$

且当 $n,m\geqslant N$ 时，有 $|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|<\varepsilon, i=1,2,3.$ 所以，对每个 i，$\xi_i^{(n)}$ 收敛.设 $\xi_i=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}$，$x=(\xi_i)$，来证明 $x\in L^p$，且 $x_n\xrightarrow{L^p}x$.

由 ① 式知，对 $k\in\mathbf{N}$，有

$$\sum_{i=1}^{k}|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|^p<\varepsilon^p,\quad n,m\geqslant N.$$

当 $n(n\geqslant N)$ 固定时，让 $m\to\infty$，可得

$$\sum_{i=1}^{k}|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|^p\leqslant\varepsilon^p,\quad n\geqslant N.$$

再令 $k\to\infty$，就有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}-\xi_i|^p\leqslant\varepsilon^p,\quad n\geqslant N.$$

故 $x\in L^p$，$x_n\xrightarrow{L^p}x$，完备性得证.

(2) 再证可分性.记 A 是所有形如 $y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m,0,\cdots\}$ 的点的全体，其中 y_i 为有理数，m 为任一自然数，则 A 是可列集.

任取 $x \in L^p$，设 $x = \{x_k\}$. 因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty$，对任意的 $\varepsilon > 0$，必有 $m > 0$ 存在，使得 $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}|x_k|^p < (\varepsilon/2)^p$；再取有理数 $y_1, y_2, \cdots, y_m$，使得 $\sum\limits_{k=1}^{m}|x_k - y_k|^p < (\varepsilon/2)^p$. 记 $y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m, 0, \cdots\}$，则 $y \in A$，且

$$\| y - x \|_p = \Big(\sum_{k=1}^{m}|x_k - y_k|^p + \sum_{k=m+1}^{\infty}|x_k|^p\Big)^{1/p}$$
$$< (2 \cdot (\varepsilon/2)^p)^{1/p} < \varepsilon.$$

从而知 A 在 L 中稠密，故 L^p 为可分空间.

例 16 对于 $C[a,b]$ 中的任意两个元素 $x(t), y(t)$，定义距离 $d(x,y) = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|x(t) - y(t)|$. 证明：$C[a,b]$ 按上述定义是一完备的、可分的距离空间.

证 (1) 先证 $C[a,b]$ 是距离空间.

$d(x,y) \geqslant 0, d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x, y$ 与 $d(x,y) = d(y,x)$ 是明显的.

设 $x(t), y(t), z(t) \in C[a,b]$，则

$$\begin{aligned}|x(t) - y(t)| &\leqslant |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|\\ &\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t) - z(t)| + \max_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t) - y(t)|\\ &= d(x,z) + d(z,y).\end{aligned}$$

所以，$C[a,b]$ 按题给定义是一距离空间.

(2) 证明 $C[a,b]$ 的完备性. 设 $\{x_n(t)\} \subset C[a,b]$，是任一基本列. 则 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N > 0$，使得 $m, n > N$ 时，恒有

$$d(x_m, x_n) = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon.$$

即当 $m, n > N$ 时，$|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon$ 对 $t \in [a,b]$ 一致地成立. 依数学分析中连续函数列的一致收敛性定理知，存在 $x_0(t) \in C[a,b]$，使得

$$d(x_m,x_0)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x_0(t)|\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

从而知 $C[a,b]$ 是完备的.

(3) 再证 $C[a,b]$ 是可分的. 由例 12 知，所有多项式组成的集合在 $C[a,b]$ 中是稠密的，又由有理数在实数中的稠密性知，全体有理系数多项式组成的集合在所有多项式组成的集合中稠密. 而全体有理系数多项式组成的集合是可数的，因而 $C[a,b]$ 是可分的.

例 17 在 $C[a,b]$ 中定义距离 $d_1(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t$，其中 $x(t),y(t)\in C[a,b]$. 证明：$C[a,b]$ 按 d_1 是距离空间，但不完备.

证 (1) 先证 $C[a,b]$ 是距离空间.

$\int_a^b|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t\geqslant 0$，$\int_a^b|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t=0\Longleftrightarrow x(t)-y(t)=0$, a.e. ,$\Longleftrightarrow x=y$ 是明显的.

$\int_a^b|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b|y(t)-x(t)|\mathrm{d}t$ 也是明显的.

取 $x(t),y(t),z(t)\in C[a,b]$，则

$$\begin{aligned}d(x,y)&=\int_a^b|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_a^b(|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|)\mathrm{d}t\\&=\int_a^b|x(t)-z(t)|\mathrm{d}t+\int_a^b|z(t)-y(t)|\mathrm{d}t\\&=d(x,z)+d(z,y),\end{aligned}$$

所以，$C[a,b]$ 按距离 d_1 是距离空间.

(2) 再证上述距离空间是不完备的. 考虑 $C[0,1]$，作 f_n 如图 6.1 所示，可以看出，$\{f_n\}$ 按距离 d_1 是基本列，但它不收敛于 $C[a,b]$ 中任何函数. 可以直观看出，它收敛于 $[1/4,3/4]$ 上的特征函数（不在 $C[a,b]$ 中）. 所以是不完备的.

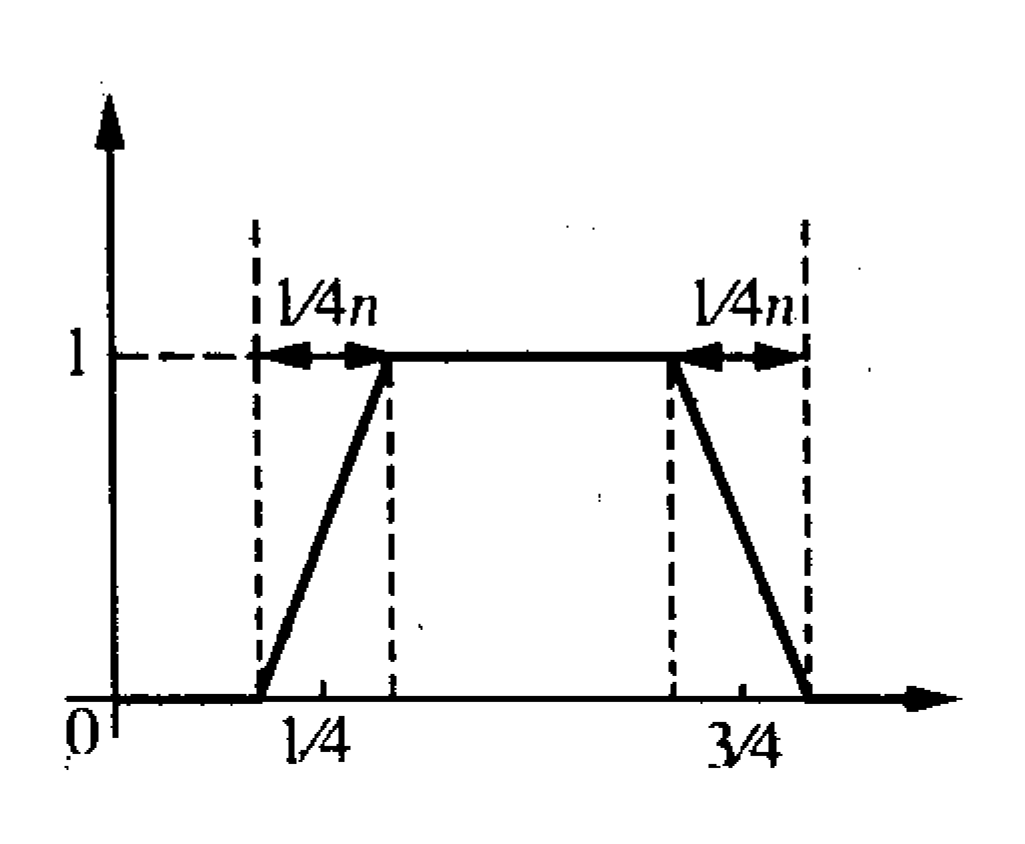


图 6.1

例 18 设 m 是有界数列 $x_n=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 组成的集合．即对每一个 x，都有一个常数 k_x，使得不等式 $|\xi_i|\leqslant k_x$ 对所有的 i 都成立．

设 $x=\{\xi_i\},y=\{\eta_i\}\in m$，定义

$$d(x,y)=\sup_i|\xi_i-\eta_i|.$$

证明：m 按 d 是一距离空间，但不是可分的．

证 (1) 先证 m 是距离空间．

$d(x,y)\geqslant 0,d(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$ 是明显的．

$d(x,y)=d(y,x)$ 也是明显的．

设 $x=\{\xi_i\},y=\{\eta_i\},z=\{\zeta_i\}\in m$，有

$$\begin{aligned}|\xi_i-\eta_i|&\leqslant|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|\\&\leqslant\sup_i|\xi_i-\zeta_i|+\sup_i|\zeta_i-\eta_i|\\&=d(x,z)+d(z,y),\end{aligned}$$

所以 $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$．于是，$m$ 为一距离空间．

(2) 证明 m 是不可分的．取 m 的子集 $m'=\{(\xi_i):\xi_i=0$ 或 $1\}$．m' 的基数等于连续基数 c，因而是不可数集．任取 $x=\{\xi_i\},y=\{\eta_i\}\in m',x\neq y$，则

$$d(x,y)=\sup_i|\xi_i-\eta_i|=1,$$

即 m' 含有不可数个元素且彼此的距离等于 1．用反证法．设 m 是可分的，则 m 中存在一个到处稠密的可数集合 m_0．以 m_0 中每一个元素作一个以 1/3 为半径的邻域，则这些邻域构成整个空间 m 的一个开覆盖．由于这些邻域是一个可数集合，从而至少有一个邻域内含有不可数集合 m' 中两个不同的元素 x,y．设这样的一个邻域的中心是 x_0，则 $x\in N(x_0,1/3),y\in N(x_0,1/3)$．故

$$1=d(x,y)\leqslant d(x,x_0)+d(x_0,y)<1/3+1/3=2/3,$$

而这是不可能的，从而知 m 一定是不可分的．

例 19 若 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1\leqslant p<\infty)$，证明：

$$\lim_{|t|\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+t)+f(x)|^p\mathrm{d}x=2\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

证 $\forall\ \varepsilon > 0$,分解 $f(x) = g(x) + h(x)$,其中 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上有紧支集的连续函数,而 $\| h \|_p < \varepsilon/4$. 显然,存在 $M > 0$,当 $|t| \geqslant M$ 时,$g(x)$ 与 $g(x-t)$ 的支集不相交. 从而

$$\int_{\mathbf{R}^n} |g(x) + g(x-t)|^p \mathrm{d}x$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} |g(x)|^p \mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}^n} |g(x-t)|^p \mathrm{d}x = 2\int_{\mathbf{R}^n} |g(x)|^p \mathrm{d}x.$$

由分解式可知 $|\, \| f \|_p - \| g \|_p | \leqslant \| h \|_p < \varepsilon/4$. 又由

$$f(x) + f(x-t) = [g(x) + g(x-t)] + [h(x) + h(x-t)],$$

以及令 $f(x) = f(x-t)$,可得

$$\Big| \| f + f_t \|_p - \| g + g_t \|_p \Big| \leqslant \| h + h_t \|_p \leqslant 2 \| h \|_p < \varepsilon/2,$$

从而,当 $\| t \| \geqslant M$ 时,有

$$\Big| \| f + f_t \|_p - 2^{1/p} \| g \|_p \Big| < \varepsilon/2.$$

于是,得到

$$\Big| \| f + f_t \|_p - 2^{1/p} \| f \|_p \Big|$$

$$\leqslant \Big| \| f + f \|_p - 2^{1/p} \| g \|_p \Big| + \Big| 2^{1/p} \| g \|_p - 2^{1/p} \| f \|_p \Big|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

例 20 设 $p,q,r > 1$,$1/p + 1/q + 1/r = 1$,$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$,$y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots)$,$z = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n, \cdots)$,$x, y, z \in L^p$,证明:$\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i, \eta_i, \zeta_i| \leqslant \| x \|_p \| y \|_q \| z \|_r$.

证 因为 $\{|\eta_i|^{qr/(q+r)}\} \in L^{(q+r)/r}$,$\{|\zeta_i|^{qr/(q+r)}\} \in L^{(q+r)/q}$,而 $r/(q+r) + q/(q+r) = 1$,所以 $\{|\eta_i\zeta_i|^{qr/(q+r)}\} \in L^1$. 且

$$\sum_i |\eta_i\zeta_i|^{qr/(q+r)} \leqslant \Big(\sum_i |\eta_i|^{\frac{qr}{q+r}\cdot\frac{q+r}{r}} \Big)^{\frac{r}{q+r}} \Big(\sum_i |\zeta_i|^{\frac{qr}{q+r}\cdot\frac{q+r}{q}} \Big)^{\frac{q}{q+r}}$$

$$= (\| y \|_q \| z \|_r)^{qr/(q+r)}$$

由 $1/p + (q+r)/(qr) = 1$,即得

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i\eta_i\zeta_i| \leqslant \Big(\sum_i |\xi_i|^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_i |\eta_i\zeta_i|^{qr/(q+r)} \Big)^{(q+r)/(qr)}$$

$$= \|x\|_p \|y\|_q \|z\|_r.$$

第三节　L^2 空间

主 要 内 容

在 L^p 空间中当 $p=2$ 时，$p'=2$. 故当 $f,g\in L^2$ 时，有 $fg\in L^1$.

一、内积与正交系

1. 对于 $f,g\in L^2(E)$，记

$$\langle f,g\rangle=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

称 $\langle f,g\rangle$ 为 f 与 g 的内积. 内积有以下简单性质：

(1) $\langle f,g\rangle=\langle g\cdot f\rangle$；

(2) $\langle f_1+f_2,g\rangle=\langle f_1,g\rangle+\langle f_2,g\rangle$；

(3) $\langle \alpha f,g\rangle=\alpha\langle f,g\rangle=\langle f,\alpha g\rangle$ (α 为实数).

2. 内积的连续性　若在 $L^2(E)$ 中，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_2=0$)，则对任意的 $g\in L^2(E)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n,g\rangle=\langle f,g\rangle.$$

3. 若 $f,g\in L^2(E)$ 且 $\langle f,g\rangle=0$，则称 f 与 g 正交；若 $\{\varphi_\alpha\}\subset L^2(E)$ 中任意的两个元都正交，则称 $\{\varphi_\alpha\}$ 是正交系；若同时有 $\|\varphi_\alpha\|_2=1$(对一切 α)，则称 $\{\varphi_\alpha\}$ 为标准化正交系.

若在正交系 $\{\varphi_\alpha\}\subset L^2(E)$ 中，对一切 α 都有 $\|\varphi_\alpha\|\neq 0$，则 $\{\varphi_\alpha/\|\varphi_\alpha\|_2\}$ 就是标准化正交系.

4. $L^2(E)$ 中任一标准化正交系都是可数的.

5. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 L^2 中的函数列，若有函数 $f\in L^2$，使得对 L^2 中任一函数 $g(x)$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

则称$\{f_n(x)\}$弱收敛于$f(x)$.

利用内积叙述为：$\{f_n(x)\}$是L^2中的函数列，如果存在$f(x) \in L^2$，使得对任意的$g(x) \in L^2$，都有

$$\langle f_n, g\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle f, g\rangle.$$

6. 若$\{f_n(x)\}$平均收敛于$f(x)$，则$\{f_n(x)\}$必弱收敛于$f(x)$.

7. $L^2(E)$空间中点列$\{f_n\}$平均收敛的充要条件是，$\{f_n\}$是基本列（即$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N > 0$，使得当$m,n \geqslant N$时，有$\| f_m - f_n \| = d(f_m, f_n) < \varepsilon$）.

8. 有界可测函数类、连续函数类及多项式函数类均在L^2中稠密.

9. L^2空间是可分的.

二、广义傅里叶(Fourier)级数

在$\mathbf{R}^n$中，当$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$是一组单位正交向量时，则任一向量$\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^n$可惟一表为$\boldsymbol{A} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n$. 推广到$L^2$空间，设$\{\varphi_i\}$是$L^2$中的标准化正交系，则$L^2$中的元可用级数$S_k(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i\varphi_i(x)$表示.

1. 设$\{\varphi_k\}$是L^2中的标准化正交系，$f \in L^2$，则称

$$c_k = \langle f, \varphi_k\rangle = \int_E f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x,\ k = 1,2\cdots$$

为f的（关于$\{\varphi_k\}$）的广义傅里叶系数，称$\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$为$f$的（关于$\{\varphi_k\}$的）的广义傅里叶级数.

2. 设$\{\varphi_k\}$是L^2中的标准化正交系，$f \in L^2$，取定k，作$f_k(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i\varphi_i(k)$，其中$a_i (i = 1,2,\cdots,k)$是实数，则当$a_i = c_i = \langle f, \varphi_i\rangle (i = 1,2,\cdots,k)$时，使得$\| f - f_k \|_2$达到最小值，最小值为

$\| f \|_2^2 - \sum_{i=1}^{k} c_i^2.$

3. 贝塞尔(Bessel)不等式　设$\{\varphi_k\}$是L^2中的标准化正交系，且$f \in L^2$,则$f(x)$的广义傅里叶系数$\{c_k\}$满足

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqslant \| f \|_2^2.$$

4. 黎斯-费舍尔(Riesz-Fischer)定理　设$\{\varphi_k\}$是L^2中的标准化正交系,若$\{c_k\}$是满足$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$的任一实数列,则存在$f \in L^2$,使得

$$\langle f, \varphi_k \rangle = c_k,\ k = 1,2,\cdots$$

5. 设$\{\varphi_k\}$是L^2中的正交系,若L^2中不再存在非零元能与一切φ_k正交,则称此$\{\varphi_k\}$是L^2中的完全系.即,若$f \in L^2$且$\langle f, \varphi_k \rangle = 0$ $(k = 1,2\cdots)$,则必有$f(x) = 0$, a.e..

6. 设$\{\varphi_k\}$是L^2中的标准化的完全系,$f \in L^2$,令$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ $(k = 1,2\cdots)$,则

$$\lim_{k \to \infty} \left\| \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i - f \right\|_2 = 0.$$

7. 设$\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_k(x)$是定义在$E$上的函数.若从$\alpha_1\psi_1(x) + \alpha_2\psi_2(x) + \cdots + \alpha_k\psi_k(x) = 0$, a.e.可推出$\alpha_i = 0$ $(i = 1,2,\cdots,k)$,则称函数$\psi_i (i = 1,2,\cdots,k)$是线性无关的,对于无限多个函数组成的函数系,如果其中任意有限个函数都是线性无关的,则称此函数系是线性无关的.

8. 设$\{\varphi_i\}$是L^2中的标准化正交系,若对任意$f \in L^2$及$\varepsilon > 0$,存在$\{\varphi_i\}$中的线性组合$g(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_j \varphi_{i_j}(x)$,使得$\| f - g \|_2 < \varepsilon$,则$\{\varphi_i\}$是完全系.

9. 设E是距离空间,若E中任一无限序列必有收敛子列,则称E为列紧的;若对任意$p \in E$,恒有p的某一邻域$N(p, \delta_0)$,使

$N(p,\delta_0)$ 中任一无限序列必有收敛子列，则称 E 是局部列紧的. L^2 是非局部列紧的.

10. 设 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 L^2 中的标准化正交系，$f \in L^2$，$\{c_k\}$ 是 f 关于 $\{\varphi_k(x)\}$ 的傅里叶系数. 若等式 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|_2^2$ 成立，则称此等式是 f 关于 $\{\varphi_k(x)\}$ 的封闭公式. 若 $\{\varphi_k(x)\}$ 对 L^2 中任一函数都有封闭公式成立，则称 $\{\varphi_k(x)\}$ 是封闭的.

11. 斯切克洛夫定理　若函数类 A 在 L^2 中是稠密的，若标准化正交系 $\{\varphi_k(x)\}$ 对于 A 中每个函数都使封闭公式成立，则 $\{\varphi_k(x)\}$ 在 L^2 中是封闭的.

疑 难 解 析

1. 弱收敛与平均收敛有何关系？

答　若 $\{f_n(x)\}$ 平均收敛于 $f(x)$，则 $\{f_n(x)\}$ 必弱收敛于 $f(x)$. 反之，不一定成立.

设 $g(x) \in L^2$，则由许瓦兹不等式有

$$\left|\int_a^b g(x)f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x\right|^2$$

$$= \left|\int_a^b g(x)(f_n(x) - f(x))\mathrm{d}x\right|^2$$

$$\leqslant \left[\int_a^b |g(x)|^2\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\mathrm{d}x\right].$$

于是　$$\left|\int_a^b gf_n\mathrm{d}x - \int_a^b gf\mathrm{d}x\right| \leqslant \|g\|\cdot\|f_n - f\|.$$

因为 $\{f_n(x)\}$ 平均收敛于 f，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$.

从而　$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b gf_n\mathrm{d}x = \int_a^b gf\mathrm{d}x.$$

即 $\{f_n(x)\}$ 弱收敛于 $f(x)$.

由三角函数系 T：$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\cdots$ 是 L^2 中标准化正交系及贝塞尔不等式知，对任一标准正交系 $\{\varphi_k\}$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle f,\varphi_k\rangle|^2\leqslant\|f\|^2$$

可见 f 关于标准正交系 $\{\varphi_k\}$ 的傅里叶系数的一般项收敛于零. 从而有黎曼-勒贝格引理:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0,\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

即函数列 $\{\cos nx\}$ 与 $\{\sin nx\}$ 在 $L^2([-\pi,\pi])$ 上弱收敛于零,但不平均收敛于零.

2. 怎样由一个线性无关的函数系得到一个正交系?

答 一般用格兰姆-施密特(Gram-Schmidt)正交化方法:设 $\{\psi_k\}$ 是 L^2 中的线性无关系,令

$$\varphi_1(x)=\psi_1(x),\varphi_2(x)=-\frac{\langle\psi_2,\varphi_1\rangle}{\|\varphi_1\|_2^2}\varphi_1(x)+\psi_2(x),\cdots$$

$$\varphi_k(x)=\alpha_{k,1}\varphi_1(x)+\alpha_{k,2}\varphi_2(x)+\cdots+\alpha_{k,k-1}\varphi_{k-1}(x)+\psi_k(x),$$

其中 $\alpha_{k,i}=-\dfrac{\langle\psi_k,\varphi_i\rangle}{\|\varphi_i\|_2^2},i=1,2,\cdots,k-1.$

则 $\{\varphi_k\}(k=1,2,\cdots)$ 是正交的.

方法、技巧与典型例题分析

了解内积的概念,掌握用内积证明一些简单的命题.

一、内积与收敛性问题

例 1 证明:许瓦兹不等式 $|\langle f,g\rangle|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$ 成立的充要条件是 f 与 g 线性相关.

证 **充分性** 设 f 与 g 线性相关,即 $f=kg$,于是

$$\begin{aligned}|\langle f,g\rangle|&=\left|\int_a^b kg(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\right|=|k|\int_a^b|g|^2\mathrm{d}x\\&=|k|\cdot\|g\|^2=\|kg\|\cdot\|g\|=\|f\|\cdot\|g\|.\end{aligned}$$

必要性 设 $|\langle f,g\rangle|=\|f\|\cdot\|g\|$. 当 $g=0$,则 f 与 g 线性相关是显然的. 若 $g\neq0$,则对任意的 k,有

$$0\leqslant\|f-kg\|^2=\langle f-kg,f-kg\rangle$$

$$= \langle f,f\rangle - 2k\langle f,g\rangle + k^2\langle g,g\rangle,$$

取 $k = \langle f,g\rangle/\langle g,g\rangle$，则上式成为

$$0 \leqslant \| f - kg \|^2 = \langle f,f\rangle - |\langle f,g\rangle|^2/\langle g,g\rangle$$
$$= \| f \|^2 - |\langle f,g\rangle|^2/\langle g,g\rangle, \qquad ①$$

依题设 $|\langle f,g\rangle| = \| f \| \cdot \| g \|$，将等式两端平方，得

$$|\langle f,g\rangle|^2 = \| f \|^2 \cdot \| g \|^2 \Longrightarrow |\langle f,g\rangle|^2/\| g \|^2 = \| f \|^2$$
$$\Longrightarrow \| f \|^2 - |\langle f,g\rangle|^2/\| g \|^2 = 0.$$

可见 ① 式右边为零，于是 $\| f - kg \| = 0$，即 $f = kg$.

例 2 在 L^2 中证明：

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{4}(\| f + g \|^2 - \| f - g \|^2).$$

证 $\frac{1}{4}(\| f + g \|^2 - \| f - g \|^2)$

$$= \frac{1}{4}(\langle f + g, f + g\rangle - \langle f - g, f - g\rangle)$$
$$= \frac{1}{4}(\langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,f\rangle + \langle f,g\rangle)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot 4\langle f,g\rangle = \langle f,g\rangle.$$

例 3 设 $\{f_n\}$ 为 L^2 中的元素序列，$f \in L^2$. 若 $\| f_n \| \to \| f \|$ 且 $\langle f_n,f\rangle \to \langle f,f\rangle$. 证明：$\| f_n - f \| \to 0 (n \to \infty)$.

证 $\| f_n - f \|^2 = \langle f_n - f, f_n - f\rangle$

$$= \| f_n \|^2 - \langle f,f_n\rangle - \langle f_n,f\rangle + \| f \|^2$$
$$= \| f_n \|^2 - 2\langle f,f_n\rangle + \| f \|^2,$$

依题设 $\langle f_n,f\rangle \to \langle f,f\rangle$ 及 $\| f_n \| \to \| f \|$，则有

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|^2 = \lim_{n\to\infty}(\| f_n \|^2 - 2\langle f_n,f\rangle + \| f \|^2)$$
$$= 2\| f \|^2 - 2\langle f,f\rangle = 0,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$.

例 4(平行四边形公式) 设 $f_1, f_2 \in L^2$，证明：

$$\| f_1 + f_2 \|^2 + \| f_1 - f_2 \|^2 = 2(\| f_1 \|^2 + \| f_2 \|^2).$$

证　因为用内积来表示范数，即有

$$\|f_1+f_2\|^2+\|f_1-f_2\|^2$$
$$=\langle f_1+f_2,f_1+f_2\rangle+\langle f_1-f_2,f_1-f_2\rangle$$
$$=2\langle f_1,f_1\rangle+2\langle f_2,f_2\rangle=2(\|f_1\|^2+\|f_2\|^2).$$

在二维实空间中，等式的意义是：平行四边形两对角线长度的平方和等于各边长度的平方和，所以称为平行四边形公式.

平均收敛、弱收敛及依测度收敛是不同的概念，有联系也有区别. 证明命题时，要注意其中的区别. 相对于弱收敛，还有强收敛的概念：设 $f,f_n\in L^p$，$n=1,2,\cdots$，若当 $f\to\infty$ 时，$\|f_n-f\|$ 收敛于 0，则称 f_n 强收敛于 f（或依范数收敛于 f）. 称 f 为 f_n 的强极限，记做 $f_n\xrightarrow{强}f$. 而弱收敛是当 $f,f_n\in L^p$；$n=1,2,\cdots$，若对每个 $g\in L^q(1/p+1/q=1)$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n g\mathrm{d}x=\int_E fg\mathrm{d}x$，记做 $f_n\xrightarrow{弱}f$.

例 5　在 L^2 中弱收敛于 f 的元素列是否依测度收敛？

解　不一定依测度收敛. 例如：$\{\sin nx\}$ 是 $L^2([0,\pi])$ 中的元素列，对任意的 $f\in L^2([0,\pi])\subset L([0,\pi])$，由黎曼 — 勒贝格引理，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,\pi]}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$，即 $\{\sin nx\}$ 弱收敛于 $F(x)=0$. 但对任意的 $n=1,2,\cdots$，$m(E(|\sin nx-0|\geqslant 1/2))\geqslant\pi/3$，所以，$\{\sin nx\}$ 不依测度收敛于 $F(x)=0$.

例 6　设 $f_n(x)$ 是 L^2 中的序列，若 f_n 依测度收敛于 f，$\|f_n\|<k$（k 为常数）. 证明：$f_n\xrightarrow{弱}f$.

证　因为 $f_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$，所以存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$，于是 $\{f_{n_k}^2(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f^2(x)$. 依法都定理，有

$$\int_E|f|^2\mathrm{d}x\leqslant\lim_{k\to\infty}\int_E|f_{n_k}|^2\mathrm{d}x\leqslant k^2$$

则 $f\in L^2$，且 $\|f\|\leqslant k$.

下设 $E=(-\infty,\infty)$，否则在 E^C 上，令 $f_n(x)=0,f(x)=0$.

(1) 先证对 L^2 中的任意有界可测函数 $g_1(x)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)g_1(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)g_1(x)\mathrm{d}x,$$

由于 $g_1(x)\in L^2$，所以 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ M>0$，使得

$$\int_{|x|\geqslant M}|g_1|^2\mathrm{d}x<(\varepsilon/(4k))^2.$$

于是，由许瓦兹不等式，得

$$\int_{|x|\geqslant M}|f_n-f|\cdot|g_1|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\left\{\int_{|x|\geqslant M}|f_n-f|^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}\cdot\left\{\int_{|x|\geqslant M}|g_1|^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $|g_1(x)|\leqslant S$，$E_1=[-M,M]$，记 $E_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)$ 为 E_{11}，$E_1(|f_n-f|<\sigma)$ 为 E_{12}，则对任意的 $\sigma>0$，

$$\int_E|f_n-f|\cdot|g_1|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{E_{11}}|f_n-f|\cdot|g_1|\mathrm{d}x+\int_{E_{12}}|f_n-f|\cdot|g_1|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant S\int_{E_{11}}|f_n-f|\mathrm{d}x+S\sigma\cdot m(E_1)$$

$$\leqslant S\left\{\int_{E_{11}}|f_n-f|\mathrm{d}x\right\}^{1/2}\left\{\int_{E_{11}}\mathrm{d}x\right\}^{1/2}+S\sigma\cdot m(E_1)$$

$$\leqslant 2kS\{m(E_{11})\}^{1/2}+2MS\sigma.$$

取 $\sigma<\varepsilon/(8MS)$，固定 σ，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}m(E_{11})=0$，所以存在 N，使得当 $n>N$ 时，$m(E_{11})<(\varepsilon/(8kS))^2$. 于是，当 $n>N$ 时

$$\int_{E_1}|f_n-f|\cdot|g_1|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\int_E f_ng_1\mathrm{d}x-\int_E fg_1\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\int_E|f_n-f|\cdot|g_1|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{|x|\geqslant M}|f_n-f|\cdot|g_1|\mathrm{d}x+\int_{E_1}|f_n-f|\cdot|g_1|\mathrm{d}x$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n g_1 \mathrm{d}x = \int_E f g_1 \mathrm{d}x.$$

(2) 证 $f_n \xrightarrow{弱} f$.

任取一 $g(x) \in L^2$,知 $\forall\ \varepsilon > 0$,在 L^2 中存在有界可测函数 $g_1(x)$,使得 $\| g - g_1 \| < \varepsilon/(3k)$. 则由(1)知,存在 N,当 $n > N$ 时,

$$\left|\int_E (f_n - f) g_1 \mathrm{d}x\right| < \varepsilon/3,$$

于是
$$\begin{aligned}
&\left|\int_E (f_n - f) g \mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \left|\int_E f_n \cdot (g - g_1) \mathrm{d}x\right| + \left|\int_E (f_n - f) g_1 \mathrm{d}x\right| \\
&\quad + \left|\int_E f \cdot (g_1 - g) \mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \| g - g_1 \| \cdot \| f_n \| + \varepsilon/3 + \| f \| \cdot \| g - g_1 \| \\
&< \varepsilon/(3k) \cdot k + \varepsilon/3 + k \cdot \varepsilon/(3k) = \varepsilon,
\end{aligned}$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n g \mathrm{d}x = \int_E f g \mathrm{d}x.$$

由 $g \in L^2$ 的任意性知,$f_n \xrightarrow{弱} f$.

例 7 设 $f(x) \equiv 0$,且 $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ n, & 0 < x < 1/n, \\ 0, & 1/n \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

证明:在 L^2 中,$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ 不成立.

证 在$[0,1]$上,显然有$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. 但看做 L^2 中元素时,有

$$d(f_n, f) = \left(\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{n} \to \infty \quad (n \to \infty),$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ 不成立.

例 8 设 $f_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$，若 $\{f_n(x)\}$ 一致有界，证明：$\{f_n(x)\}$ 弱收敛于 $f(x)$.

证 任取 $g\in L^2$，则有

$$\left|\int_a^b f_n g\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)g\right|=\left|\int_a^b (f_n-f)g\mathrm{d}x\right|\leqslant \|f_n-f\|\cdot\|g\|$$

$$=\|g\|\cdot\left\{\int_a^b |f_n-f|^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}, \qquad ①$$

依勒贝格有界收敛定理，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b (f_n-f)\mathrm{d}x=0$，从而由①式，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n g\mathrm{d}x=\int_a^b fg\mathrm{d}x,$$

即 $\{f_n(x)\}$ 弱收敛于 $f(x)$.

例 9 如果 $\{f_n(x)\}$ 在 L^2 中弱收敛于 $f(x)$，且 $\|f_n\|\to\|f\|$，证明：$\{f_n(x)\}$ 平均收敛于 $f(x)$.

证 $\int_a^b (f_n-f)^2\mathrm{d}x=\int_a^b f_n^2\mathrm{d}x-2\int_a^b f_n f\mathrm{d}x+\int_a^b f^2\mathrm{d}x$ 依题设 $\|f_n\|\to\|f\|$，故有

$$\int_a^b f_n^2\mathrm{d}x=\|f_n\|^2\to\|f\|^2=\int_a^b f^2\mathrm{d}x.$$

又 $\{f_n\}\xrightarrow{\text{弱}}f$，则 $\int_a^b f_n f\mathrm{d}x\to\int_a^b f^2\mathrm{d}x$. 由第一式

$$\int_a^b (f_n-f)^2\mathrm{d}x\to\int_a^b f^2\mathrm{d}x-2\int_a^b f^2\mathrm{d}x+\int_a^b f^2\mathrm{d}x=0,$$

即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f_n-f)^2\mathrm{d}x=0,$$

也即证明 $\{f_n(x)\}$ 平均收敛于 $f(x)$.

附注：本例中 $\{f_n(x)\}\xrightarrow{\text{弱}}f$ 的条件一般是不可去掉的. 若只假定 $\|f_n\|\to\|f\|$，得不出 $\|f_n-f\|\to 0$.

因为，若取 $f_n(x)=1+1/n, x\in[0,1]$,

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1/2,\\ -1, & 1/2<x\leqslant 1.\end{cases}$$

则 $f_n, f\in L^2[0,1]$，且有

$$\|f_n\|^2=\int_0^1(1+1/n)^2\mathrm{d}x\to 1=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\|f\|^2,$$

即 $\|f_n\|\to\|f\|$. 但是

$$\int_0^1(f_n-f)^2\mathrm{d}x=\int_0^{1/2}(1+1/n-1)^2\mathrm{d}x+\int_{1/2}^1(1+1/n-1)^2\mathrm{d}x\to 2,$$

可知 $\|f_n-f\|$ 不趋于零.

例 10 设 L_k^2 是 $[a,b]$ 上满足条件

$$|f(x)|\leqslant k,\ \text{a.e.},\ [a,b]$$

的平方可积的可积函数作成的集合,证明:L_k^2 是 L^2 的一个闭子集,且在 L_k^2 中序列 $\{f_n(x)\}$ 平均收敛于 $f(x)$ 的充要条件是 $f_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$.

证 (1)先证 L_k^2 是 L^2 的一个闭子集,即证:若 $g(x)$ 是 L_k^2 的一个聚点,则 $g(x)\in L_k^2$.

由聚点定义知,在 L_k^2 中有一列函数 $\{f_n(x)\}$,使 $\|f_n-g\|\to 0$,则必有子列 $\{f_{n_k}(x)\}$,使得 $\{f_{n_k}(x)\}\to g(x)$, a.e. 在 $[a,b]$ 上.

因为 $|f_{n_k}(x)|\leqslant k$, a.e. 在 $[a,b]$ 上,取极限即得

$$|g(x)|\leqslant k,\ \text{a.e.},\ [a,b],$$

即 $g\in L_k^2$.

(2)证充要条件.

必要性 对任意 $\sigma>0$,令 $A_n(\sigma)=\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}$,则

$$\int_a^b|f_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{A_n(\sigma)}|f_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\sigma^2 m(A_n(\sigma)).$$

因为 $\{f_n(x)\}$ 平均收敛于 $f(x)$,故上式左端收敛于零,而右端 $m(A_n(\sigma))\to 0(n\to\infty)$,所以 $f_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$.

充分性 设 $f_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$,如(1),有 $f(x)\in L_k^2$. 对任意 $\sigma>0$,令

$$E_n(\sigma)=\{x:|f_n-f|\geqslant\sigma\},B_n(\sigma)=[a,b]\setminus E_n(\sigma),$$

则 $$\int_a^b|f_n-f|^2\mathrm{d}x=\int_{E_n(\sigma)}|f_n-f|^2\mathrm{d}x+\int_{B_n(\sigma)}|f_n-f|^2\mathrm{d}x$$

$$<\int_{E_n(\sigma)}|f_n-f|^2\mathrm{d}x+\int_a^b\sigma^2\mathrm{d}x$$
$$=\int_{E_n(\sigma)}|f_n-f|^2\mathrm{d}x+\sigma^2(b-a). \qquad ①$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}m(E_n(\sigma))=0$及$|f_n-f|^2$可积，则由积分的绝对连续性，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当$m(e)<\delta$时，恒有

$$\int_e|f_n-f|^2\mathrm{d}x<\varepsilon/2.$$

又对上述δ，存在$N>0$，当$n\geqslant N$时，有$m(E_n(\sigma))<\delta$. 于是，当$m\geqslant N$时，有

$$\int_{E_n(\sigma)}|f_n-f|^2\mathrm{d}x<\varepsilon/2.$$

选取σ，使$\sigma^2(b-a)<\varepsilon/2$，从而当$n\geqslant N$时，由①式得

$$\int_a^b|f_n-f|^2\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$. 证得$\{f_n(x)\}$平均收敛于$f(x)$.

例 11 设$f,f_n\in L^p(p\geqslant1)$，$f_n\to f$，a. e.. 证明：在$L^p$中，$f_n\xrightarrow{弱}f$的充要条件是$\|f_n\|_p\to\|f\|_p$.

证 必要性 由$|\|f_n\|_p-\|f\|_p|\leqslant\|f_n-f\|_p$即得.

充分性 $\forall\ \varepsilon>0$，因为$f\in L^p$，即$|f|^p\in L$，故存在k，使得

$$\left\{\int_{|x|\geqslant k}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}<\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p},$$

设$E_0=(-\infty,-k)\cup(k,\infty)$，因为$\|f_n\|_p\to\|f\|_p$，且$f_n\to f$，a. e.，则有

$$\left\{\int_{E_0}|f_n|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\to\left\{\int_{E_0}|f|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p},$$

于是，存在N_1，当$n>N_1$时，有

$$\left\{\int_{E_0}|f_n|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}<\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p}.$$

从而 $$\int_{E_0}|f_n-f|^p\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\left\{\left[\int_{E_0}|f_n|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}+\left[\int_{E_0}|f|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\right\}^p<\frac{\varepsilon}{2}.$$
因为 $\|f_n\|_p\to\|f\|_p$，所以存在 $N_2\geqslant N_1$，当 $n>N_2$ 时，有 $\|f_n\|_p^p<\|f\|_p^p+1$. 又 $f_n\to f$, a.e.，所以在 $E_1=[-k,k]$ 上 f_n 依测度收敛于 f. 这时，对正数 $\sigma<\varepsilon/(8k)$，存在 $N>N_2$，使得当 $n>N$ 时，
$$m(E_1(|f_n-f|\geqslant\sigma))<\varepsilon/[4(2\|f\|_p^p+1)],$$
得 $$\int_{E_1}|f_n-f|^p\mathrm{d}x$$
$$=\int_{E_1(|f_n-f|<\sigma)}|f_n-f|^p\mathrm{d}x+\int_{E_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)}|f_n-f|^p\mathrm{d}x$$
$$<\sigma\cdot m(E_1)+(2\|f\|_p^p+1)\cdot m(E_1(|f_n-f|\geqslant\sigma))$$
$$<\varepsilon/4+\varepsilon/4=\varepsilon/2,$$
故当 $n>N$ 时，有
$$\int_E|f_n-f|^p\mathrm{d}x=\int_{E_0}|f_n-f|^p\mathrm{d}x+\int_{E_1}|f_n-f|^p\mathrm{d}x$$
$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$
即 $\|f_n-f\|_p^p\to0$. 也就是 $f_n\xrightarrow{\text{强}}f$.

例 12 设 $\{f_n\}$ 是 L^2 中的序列，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|f_n\|<\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 收敛.

证 令 $S_n=f_1+f_2+\cdots+f_n$，于是
$$\|S_n-S_m\|=\left\|\sum_{j=m+1}^{n}f_j\right\|\leqslant\sum_{j=m+1}^{n}\|f_j\|$$
$$\leqslant\sum_{j=n+1}^{\infty}\|f_j\|\to0\ (m\to\infty).$$
从而，$\{S_n\}$ 是基本列. 又由于 L_2 是完备的，因此 $\{S_n\}$ 必收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ 收敛.

例13 设E是距离空间,$A\subset E$,令$f(x)=\inf\limits_{y\in A}\{d(x,y)\}$,证明:$f(x)$是连续函数.

证 只需证明:若$d(x_n,x_0)\to 0$,则$|f(x_n)-f(x_0)|\to 0(n\to\infty)$.

设$\{x_n\}\subset E$,$x_0\in E$,且$d(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty)$.任取$y\in A$,由三角不等式,有

$$d(x_n,y)\leqslant \mathrm{d}(x_n,x_0)+d(x_0,y),$$

于是 $$\inf_{y\in A}\{d(x_n,y)\}\leqslant d(x_n,x_0)+\inf_{y\in A}\{d(x_0,y)\},$$

即 $$f(x_n)\leqslant d(x_n,x_0)+f(x_0)\Longrightarrow f(x_n)-f(x_0)\leqslant d(x_n,x_0), \quad ①$$

同理 $$f(x_0)-f(x_n)\leqslant d(x_n,x_0). \quad ②$$

由①,②两式即得

$$|f(x_n)-f(x_0)|\leqslant d(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty),$$

故$f(x)$是连续函数.

二、正交系问题与傅里叶级数

研究标准正交系就是研究L^2空间的坐标系问题.要认真理解标准正交系的概念,标准正交系的封闭性与完全性以及它们之间的等价性.要掌握贝塞尔不等式$\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k^2\leqslant\|f\|^2\right)$和巴塞瓦等式$\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k^2=\|f\|^2\right)$.

例14 设$\{\varphi_k\}$是L^2中的标准正交系,证明:$\{\varphi_k\}$中任意有限多个元素都是线性无关的.

证 设$\varphi_{k_1},\varphi_{k_2},\cdots,\varphi_{k_n}$是$\{\varphi_k\}$中任取的有限个元素,要证$\alpha_1\varphi_{k_1}+\alpha_2\varphi_{k_2}+\cdots+\alpha_n\varphi_{k_n}=0$的充要条件是$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$.

充分性是显然的.现证必要性.设

$$\alpha_1\varphi_{k_1}+\alpha_2\varphi_{k_2}+\cdots+\alpha_n\varphi_{k_n}=0,$$

则 $$\begin{aligned}0&=\langle\alpha_1\varphi_{k_1}+\alpha_2\varphi_{k_2}+\cdots+\alpha_n\varphi_{k_n},\varphi_{km}\rangle\\&=\alpha_m\langle\varphi_{km},\varphi_{km}\rangle,m=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

因为$\{\varphi_k\}$是标准的，所以$\langle\varphi_{k_m},\varphi_{k_m}\rangle=1, m=1,2,\cdots,n$，从而$\alpha_m=0$，$m=1,2,\cdots,n$.

例15 设$\{\varphi_k\}$是L^2中一封闭标准正交系，$f\in L^2$，证明：对任一可测集$E\subset[a,b]$，$f(x)$关于$\{\varphi_k\}$的傅里叶级数在E上可逐项积分，即

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_E\varphi_k(x)\mathrm{d}x,$$

其中c_k为$f(x)$的广义傅里叶系数.

证 设$g(x)$是E上的特征函数，即

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\in[a,b]\setminus E,\\ 1, & x\in E.\end{cases}$$

则$g(x)\in L^2$. 于是，有

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_E\varphi_k(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

可见，$f(x)$关于$\{\varphi_k\}$的傅里叶级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$在$E$上可以逐项积分.

例16 有限函数系在L^2中不可能是完全的.

证 设$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_N\}$为L^2中的有限函数系，不妨设为线性无关系.

用施密特正交化方法可作出与F等价的标准正交系$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N\}$，$\Omega$与$F$可互相表示，且同为完全或不完全的.

若Ω为L^2中的完全系，则亦为封闭系，故对L^2中每个f，均可表为Ω的线性组合，即$f=\sum\limits_{k=1}^{N}c_k\omega_k(c_k=\langle f,\omega_k\rangle)$.

下面证明L^2中最大线性无关函数组所含函数个数不超过N，

从而得出矛盾.

设$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m(m\geqslant N)$为$L^2$中任意一组线性无关系. 它们都可用$\Omega$线性表示,设有

$$\varphi_1=a_{11}\omega_1+a_{12}\omega_2+\cdots+a_{1N}\omega_N,$$
$$\varphi_2=a_{21}\omega_1+a_{22}\omega_2+\cdots+a_{2N}\omega_N,$$
$$\vdots$$
$$\varphi_m=a_{m1}\omega_1+a_{m2}\omega_2+\cdots+a_{mN}\omega_N,$$

由于矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mN} \end{pmatrix}_{m\times N}$$

的最大秩为N,即其m个行向量中至多有N个线性无关,其他的行向量可以用这N个线性无关的行向量线性表示. 从而知函数系φ_1,$\varphi_2,\cdots,\varphi_m$中至多有$N$个是线性无关,即$L^2$中任一函数系至多有$N$个是线性无关的,这与$L^2$中存在含有无列个线性无关函数的函数系的结果矛盾. 于是得出有限函数系F在L^2中不可能是完全的.

例 17 设$\{\omega_k(x)\}$是一完全的标准化正交系,若$\{\varphi_k(x)\}$是L^2中满足$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_a^b[\omega_k(x)-\varphi_k(x)]^2\mathrm{d}x<1$的标准化正交系,证明:$\{\varphi_k(x)\}$也是完全的.

证 依题设,有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_k-\varphi_k\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b(\omega_k-\varphi_k)^2\mathrm{d}x<1,$$

设$\varphi\in L^2$,且$\langle\varphi,\varphi_k\rangle=0,k=1,2,\cdots$,则由

$$\langle\varphi,\omega_k\rangle=\langle\varphi,\varphi_k\rangle+\langle\varphi,\omega_k-\varphi_k\rangle=\langle\varphi,\omega_k-\varphi_k\rangle,$$

有 $$|\langle\varphi,\omega_k\rangle|^2=|\langle\varphi,\omega_k-\varphi_k\rangle|^2\leqslant|\varphi|^2\cdot\|\omega_k-\varphi_k\|^2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle\varphi,\omega_k\rangle|^2\leqslant\|\varphi\|^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_k-\varphi_k\|^2.$$

若$\varphi\neq0$，则$\|\varphi\|^2>0$. 在题设条件下

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle\varphi,\omega_k\rangle|^2\leqslant\|\varphi\|^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_k-\varphi_k\|^2<\|\varphi\|^2.$$

而$\{\omega_k\}$为完全系，也是封闭系，应有

$$\|\varphi\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle\varphi,\omega_k\rangle|^2,$$

从而得
$$\|\varphi\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle\varphi,\omega_k\rangle|^2\leqslant\|\varphi\|^2,$$

这是不可能的. 故必有$\varphi=0$，即$\{\varphi_k\}$为完全系.

例 18 设$\{e_k\}$是L^2中一标准正交系，$\{a_k\}$是一族常数，证明：下述条件是等价的：

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}a_ke_k$ 收敛； (2) $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$ 收敛；

(3)存在$x\in L^2$，使$a_k=\langle x,e_k\rangle$.

证 (i)先证(1)与(2)等价. 令

$$S_n=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n,$$
$$\sigma_n=|a_1|^2+|a_2|^2+\cdots+|a_n|^2.$$

由$\{e_k\}$的正交性，则对任意的m及$n>m$，有

$$\begin{aligned}\|S_n-S_m\|^2&=\|a_{m+1}e_{m+1}+a_{m+2}e_{m+2}+\cdots+a_ne_n\|^2\\&=|a_{m+1}|^2+|a_{m+2}|^2+\cdots+|a_n|^2=\sigma_n-\sigma_m.\end{aligned}$$

因此，$\{S_n\}$是基本列的充要条件是$\{\sigma_n\}$为基本列. 又因为L^2及实直线$\mathbf{R}^1$都是完备的，所以证得$\sum_{k=1}^{\infty}a_ke_k$收敛的充要条件是$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$收敛.

(ii)证(2)与(3)等价.

设$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$收敛，则由(i)知，$\sum_{k=1}^{\infty}a_ke_k$亦收敛，设$\sum_{k=1}^{\infty}a_ke_k=x$，令$S_n=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$，于是

$$\langle S_n,e_j\rangle=a_j,\ j=1,2,\cdots,k\ (k\leqslant n\text{ 且固定})$$

由假设条件，知$S_n \to x (n\to\infty)$. 由内积的连续性

$$a_j = \langle S_n, e_j\rangle \to \langle x, e_j\rangle \ (j\leqslant k),$$

当$n\to\infty$时，$k(\leqslant n)$也可以任意大，所以$a_j=\langle x,e_j\rangle, j=1,2,\cdots$.

即由②⟹③. 下证由③⟹②.

设$a_k=\langle x,e_k\rangle$，由贝塞尔不等式，知$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2$收敛. 由②⟹③过程知，$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$收敛.

又由(i)知②与①等价，从而$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$收敛.

例 19 设$\{\varphi_k\}$是L^2中一个标准化正交系，$f\in L^2$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$n$个实数. 证明：$\left\|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\right\|$当且仅当$\alpha_k=\langle f,\varphi_k\rangle \ (k=1,2,\cdots,n)$时取最小值.

证 记$c_k=\langle f,\varphi_k\rangle$. 因为

$$\langle f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k,\varphi_j\rangle=\langle f,\varphi_j\rangle-c_j=0,\ j=1,2,\cdots,n.$$

于是，知$f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k$与$\varphi_j(j=1,2,\cdots,n)$正交，从而与$\varphi_j$的任意线性组合正交. 所以

$$\begin{aligned}\left\|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\right\|^2&=\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k+\sum_{k=1}^{n}(c_k-\alpha_k)\varphi_k\right\|^2\\&=\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\right\|^2+\left\|\sum_{k=1}^{n}(c_k-\alpha_k)\varphi_k\right\|^2\\&=\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\right\|^2+\sum_{k=1}^{n}|c_k-\alpha_k|^2.\end{aligned}$$

故当且仅当$\alpha_k=c_k, k=1,2,\cdots,n$时，$\left\|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\right\|$达到最小值$\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\right\|$.

例20 设M是L^2的一个子集，$M^\perp$表示与M中所有元素都正交的元素的集合，即$M^\perp=\{g:\langle f,g\rangle=0,对任意f\in M\}$. 证明：$M^\perp$是$L^2$的一个完备子空间.

证 (1)先证$M^\perp$是线性子空间. 设$x,y\in M^\perp$，则对任意实数α及任意$z\in M$，有

$$\langle x+\alpha y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\alpha\langle y,z\rangle=0.$$

即$x+\alpha y\in M^\perp$，故$M^\perp$是一个线性子空间.

(2)再证$M^\perp$是闭的. 设$x_0\in(M^\perp)'$，则有$\{x_n\}\subset M^\perp$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 任取$y\in M$，由内积的连续性知，$\langle x_0,y\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}\langle x_n,y\rangle=0$，于是，$x_0\in M^\perp$. 因此$M^\perp$是闭的.

由(1)，(2)得$M^\perp$是L^2的一个完备子空间.

例21 证明：标准化正交系至多是可列的.

证 L^2中存在稠密的可列子集，设$\sum=\{f_1,f_2,\cdots\}$于L^2中稠密. 设$\Omega=\{\omega_\alpha,\alpha\in I\}$是$L^2$中的任一标准化正交系，则当$\alpha\neq\beta$时，有

$$\|\omega_\alpha-\omega_\beta\|^2=\|\omega_\alpha\|^2+\|\omega_\beta\|^2=2\Longrightarrow\|\omega_\alpha-\omega_\beta\|=\sqrt{2}.$$

对每个$\omega_\alpha(\alpha\in I)$，由于$\sum$与$L^2$稠密知，必有$f_{n_\alpha}\in\sum$，使得$\|f_{n_\alpha}-\omega_\alpha\|<\varepsilon$. 取$\varepsilon\leqslant\sqrt{2}/4$. 则当$\alpha\neq\beta$时，有

$$\begin{aligned}\|f_{n_\alpha}-f_{n_\beta}\|&\geqslant\|\omega_\alpha-\omega_\beta\|-\|\omega_\alpha-f_{n_\alpha}\|-\|\omega_\beta-f_{n_\beta}\|\\&\geqslant\sqrt{2}-\sqrt{2}/4-\sqrt{2}/4=\sqrt{2}/2>0.\end{aligned}$$

即知$f_{n_\alpha}\neq f_{n_\beta}$，说明不同的$\omega_\alpha(\alpha\in I)$对应于不同的$f_{n_\alpha}$. 从而知$\Omega=\{\omega_\alpha,\alpha\in I\}$与$\sum=\{f_1,f_2,\cdots\}$的一个子集对等，则$\Omega$至多是可列的.

例22 设$\{\omega_k(x)\}$是$[a,b]$上封闭的标准化正交系，则在$[a,b]$上关系式$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x)=\infty$几乎处处成立.

证 用反证法. 若不然，有$m\left(\left\{x:\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x)<\infty\right\}\right)>0$. 于是，

必有 $M>0$，使 $m\left(\left\{x:\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x)<M\right\}\right)>0$. 记 $H=\left\{x:\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x)<M\right\}$，则 $m(H)>0$.

取 H 的子集 H^*，使 $0<m(H^*)<1/(2M)$，在 $[a,b]$ 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}A, & x\in H^*,\\ 0, & x\overline{\in} H.\end{cases}\quad (A\neq 0)$$

则
$$\|f\|^2=\int_a^b=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=A^2\cdot m(H^*),$$

$$\sigma_k^2=\left(\int_a^b f(x)\omega_k(x)\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_{H^*}A\omega_k(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

$$=A^2\left(\int_H\omega_k(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant A^2m(H^*)\int_{H^*}\omega_k^2(x)\mathrm{d}x,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\leqslant A^2m(H^*)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{H^*}\omega_k^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=A^2m(H^*)\int_{H^*}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$<A^2\cdot m(H^*)\cdot M\cdot m(H^*)<\frac{1}{2}A^2m(H^*).$$

而
$$\|f\|^2=A^2m(H^*)>\frac{1}{2}A^2m(H^*)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2,$$

即 $\|f\|^2>\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$. 这与 $\{\omega_k(x)\}$ 是封闭的标准化正交系假设相矛盾，所以必有 $m\left(E\left\{x:\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x)<\infty\right\}\right)=0$.

例 23 设三角级数系 $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 在任一正测度集 E 上收敛，证明：$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=0$，$\lim\limits_{k\to\infty}b_k=0$.

证 由题设知，$\lim\limits_{k\to\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=0$ 在 E 上成立. 令 $r_k=(a_k^2+b_k^2)^{1/2}$，则存在 θ_k，满足

$$a_k\cos kx+b_k\sin kx=r_k\cos(kx+\theta_k).$$

若a_k,b_k中有一个不收敛于零，即$r_k\to 0(k\to\infty)$不成立，则必有子列$\{k_i\}$及正数σ，满足$k_1<k_2<\cdots,r_{k_i}>\sigma$，且当$x\in E$时，有$\cos(k_i\theta+\theta_{k_i})\to 0(n\to\infty)$. 因为$|\cos^2(k_ix+\theta_{k_i})|\leqslant 1$，则依有界收敛定理，有

$$\lim_{i\to\infty}\int_E\cos^2(k_ix+\theta_{k_i})\mathrm{d}x=\int_E\lim_{i\to\infty}\cos^2(k_ix+\theta_{k_i})\mathrm{d}x=0,$$

但是
$$\begin{aligned}&\int_E\cos^2(kx+\theta_k)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_E[1+\cos(2kx+2\theta_k)]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}m(E)+\cos(2\theta_k)\int_E\cos 2kx\mathrm{d}x-\sin(2\theta_k)\int_E\sin 2kx\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为$\int_E\cos kx\mathrm{d}x,\int_E\sin kx\mathrm{d}x$是$E$的特征函数的傅里叶系数，由黎曼-勒贝格引理知

$$\int_E\cos 2kx\mathrm{d}x\to 0,\quad\int_E\sin 2kx\mathrm{d}x\to 0.$$

从而
$$\lim_{k\to\infty}\int_E\cos^2(kx+\theta_k)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}m(E)>0,$$

得出矛盾. 由此得出，当$k\to\infty$时，$a_k\to 0,b_k\to 0$.

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝实变函数　　内容、方法与技巧
作者＝孙清华　　孙昊编
页数＝２８６
ＳＳ号＝１１３９３７７６
出版日期＝２００４年０９月第１版

前言
目录